De la Mecánica Celeste a los Sistemas Dinámicos

Carles Simó

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi, Universitat de Barcelona,
Gran Via, 585, 08007 Barcelona, España
E-mail: carles@maia.ub.es

Resumen

La Mecánica Celeste estudia el movimiento de los astros y, en general, todo tema relacionado con el problema de los N cuerpos y sus aplicaciones a la ciencia espacial. Podríamos situar el origen remoto de la Mecánica Celeste en el conocimiento que los astrónomos babilonios y chinos tenían del movimiento de los astros.

Muchas de las cuestiones de la Mecánica Celeste tienen un carácter conservativo. Sin embargo, la Naturaleza nos da pruebas constantes de la presencia de efectos disipativos. Para estudiar ambos tipos de sistemas utilizamos la teoría de los Sistemas Dinámicos. Estos estudian los modelos de la evolución de los fenómenos naturales y, por extensión, cualquier sistema, natural o artificial, concreto o abstracto, que evolucione con el tiempo, así como los cambios que se producen en dicha evolución cuando varían los parámetros del sistema. Son útiles en todos los campos de la ciencia y de la técnica.

Una idea básica en la teoría de los Sistemas Dinámicos es la representación de la evolución de los sistemas en un cierto espacio de estados o espacio de fases. O, mejor aún, en un espacio que describa el estado y los parámetros del sistema simultáneamente. La comprensión de las posibles evoluciones del sistema y el entender si su comportamiento será regular o caótico se basa en el conocimiento de ciertos objetos geométricos en ese espacio.

En el estudio de los Sistemas Dinámicos se usan herramientas de todos los dominios de la Matemática. Para sistemas de cierta complejidad (por ejemplo, cualquier modelo cercano a la realidad), no se puede dar una descripción correcta sin recurrir a Métodos Numéricos. Recíprocamente, cualquier Método Numérico de tipo iterativo puede contemplarse como un Sistema Dinámico. Eso da lugar a una fructífera cooperación entre ambos dominios del conocimiento.

El uso de la computación en Sistemas Dinámicos, siempre guiada por el conocimiento teórico que proporcionan el Análisis y la Geometría, permite ubicar los objetos geométricos mencionados. Por otra parte es posible convertir resultados numéricos en rigurosos, mediante las llamadas "demostraciones asistidas por ordenador". Llegamos así a una de las líneas de investigación más recientes dentro de la Matemática y sus aplicaciones.

En esta conferencia se presentan someramente las líneas aquí expuestas que, en cierto sentido, son un reflejo de mi evolución como investigador.

1. A modo de Introducción

¿Qué tienen en común el movimiento de los planetas, las reacciones químicas, la evolución de una población biológica, el flujo de líquido por un tubo, los movimientos de un terreno, la dispersión de manchas de petróleo, el funcionamiento del corazón o los procesos enzimáticos? La respuesta es simple: Todos ellos son fenómenos cuya dinámica puede ser bien aproximada por *ecuaciones diferenciales* de un tipo u otro.

Es decir, existen magnitudes que sirven para describir el fenómeno y cuyas derivadas respecto al tiempo se expresan en función del estado y, eventualmente, de efectos exteriores que dependen del tiempo. Puede ser, además, que aparezcan derivadas respecto al espacio, o efectos de memoria temporal o acoplamiento con otros fenómenos. Pero, de un modo abstracto, tienen mucho en común. Es decir, existen *modelos matemáticos* de esos fenómenos, que se traducen en ecuaciones diferenciales.

Los modelos matemáticos son llamados a veces *leyes de la física* o *leyes de la Naturaleza.* No podemos ser tan pretenciosos: Como mucho los modelos matemáticos son *aproximaciones* suficientemente útiles para entender algunos aspectos de la Naturaleza.

Un modelo paradigmático es el movimiento de los astros, estudiado por la *Mecánica Celeste.* Uno de los principios básicos de la Mecánica es el principio de la *mínima acción* (o, mejor, de la acción estacionaria). Matemáticamente se define la acción como la integral del Lagrangiano a lo largo de un camino. Físicamente significa que la energía se reparte de la mejor manera posible entre cinética y potencial.

De manera análoga, los matemáticos tendemos a minimizar *nuestra acción* pero, imitando la Naturaleza, sin dejar de hacer las cosas. Simplemente, se busca la generalidad porque de esta forma se resuelven muchos problemas a la vez. Quisiéramos saber, no cómo es una cierta solución de una ecuación diferencial, sino cómo son todas. Si, además, la ecuación depende de parámetros (por ejemplo, ciertas constantes físicas), también nos gustaría saber cómo cambian las soluciones, cuantitativa y cualitativamente, al variar dichos parámetros.

Éste es el objetivo de los *Sistemas Dinámicos* en su sentido más amplio. En sus aspectos teóricos interaccionan con muchas ramas de la Matemática (como el análisis, la geometría, la topología, la teoría de la medida, el análisis funcional, las probabilidades, el álgebra, la teoría de números, etc). Por otro lado interaccionan con el análisis numérico y la computación. Y, por supuesto, en su aspecto aplicado, con todas las ramas de la ciencia y de la técnica.

En los últimos 30 años he pasado de estudiar problemas en el campo de la Mecánica Celeste a interesarme también en diversas cuestiones, teóricas, numéricas y aplicadas en el campo de los Sistemas Dinámicos. Esa travesía la he realizado acompañado de estudiantes y colaboradores. De todos ellos he aprendido diversas cosas que nos han ayudado a mejorar nuestra comprensión de muchos problemas. Mi profundo agradecimiento a todos ellos.

En lo que sigue esbozaré algunas ideas de ambos campos.

2. La Mecánica Celeste y sus aplicaciones

La Mecánica Celeste nace como la rama de la Matemática que estudia el movimiento de los astros del sistema solar. Desde tiempo remoto la humanidad ha observado la posición de los astros celestes y su relación con las estaciones. De la observación se ha intentado pasar a la explicación de las causas del movimiento y a la predicción.

Puede considerarse también la Mecánica Celeste como la parte más matemática de la Astronomía y como un paradigma del método científico. En la actualidad las mismas ideas se vienen utilizando en el diseño de todo tipo de misiones espaciales, añadiendo un ingrediente adicional, que es la posibilidad de controlar el movimiento de satélites artificiales y naves espaciales.

La fuerza dominante en Mecánica Celeste es la gravitación como si los cuerpos fueran masas puntuales y en ella nos centraremos en esta exposición. Por supuesto, hay una larga lista de otros tipos de fuerzas que actúan sobre cuerpos celeste naturales y artificiales. Podemos mencionar efectos relativistas, efectos de marea, anomalías de la gravedad (como la debida al achatamiento de la Tierra), frenado atmosférico, presión de radiación, electromagnéticas, las debidas a la vaporización de parte de la masa de los cometas al acercarse al Sol, etc.

Durante más de tres siglos la Mecánica Celeste ha evolucionado en las líneas siguientes:

1. **Las leyes fundamentales**: Son las leyes de Newton que, en el caso del problema de N cuerpos con masas m_i, $i = 1, \ldots, N$ y posiciones en el espacio r_i, vienen dadas por

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} G m_j \frac{r_j - r_i}{d_{i,j}^3}. \tag{1}$$

   G representa la constante de la gravitación y $d_{i,j}$ la distancia del cuerpo de masa m_i al cuerpo de masa m_j. Un punto indica derivada respecto al tiempo. Es decir, se expresan las aceleraciones que actúan sobre los distintos cuerpos en función de su posición relativa.

   Es también útil introducir la velocidades de los distintos cuerpos, v_i. Entonces la ley de Newton (1) se expresa como

$$\begin{aligned} \frac{dr_i}{dt} &= v_i, \\ \frac{dv_i}{dt} &= \sum_{j=1, j\neq i}^{N} G m_j \frac{r_j - r_i}{d_{i,j}^3}. \end{aligned} \tag{2}$$

2. **La teoría de perturbaciones**. Para $N = 2$ las soluciones de (1) son elementales, y se denominan soluciones keplerianas. Ello no es así para $N \geq 3$. Urgidos por la necesidad de predecir el movimiento de los astros (con la Luna en primer lugar), se considera que su movimiento es una *perturbación* del movimiento kepleriano.

   En efecto, la acción dominante sobre un planeta es el Sol, y los efectos de los otros planetas son mucho menores. Sobre la Luna el efecto dominante es el de la Tierra, y se considera como perturbación la diferencia de los efectos del Sol sobre la Tierra y sobre la Luna.

   Se trata, por tanto, de expresar la solución mediante desarrollos en uno o varios *pequeños parámetros*, como son la relación de masas entre Júpiter y el Sol ($\approx 1/1000$) o la relación de las distancias de la Tierra a la Luna y el Sol ($\approx 1/400$).

3. **Los sistemas hamiltonianos**. Pueden considerarse como una sistematización y generalización de la Mecánica, aunque su dominio de aplicabilidad es mucho más amplio. Dada la posición y el momento lineal de los cuerpos, que denotamos por $q_i (= r_i)$ y $p_i (= m_i v_i)$, respectivamente, las *ecuaciones de Hamilton* se expresan como

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

   donde $H(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)$ es el hamiltoniano que, físicamente, representa la energía total del sistema. Para N cuerpos, es la suma de la cinética y la potencial.

   Las variables $(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)$, cambian con el paso del tiempo. El conjunto de todos sus posibles valores se conoce como *espacio de fases* $\mathscr{E}$. Así, posición y momento de los N cuerpos en un instante dado corresponden a un punto en $\mathscr{E}$. Geométricamente estamos hablando de un espacio de dimensión $6N$. Las soluciones de los sistemas hamiltonianos preservan la energía total y también el volumen en $\mathscr{E}$ (y por eso se llaman *conservativos*).

   Una ventaja adicional de los sistemas hamiltonianos es que existen cambios de variable (llamados *canónicos*) que preservan la forma (3) de las ecuaciones. Ello permite el intentar simplificar las ecuaciones del movimiento y sistematizar la teoría de perturbaciones.

4. **El paso a los aspectos cualitativos**. Teórica y prácticamente se presenta aquí un problema. La teoría de perturbaciones permite, en principio, obtener fórmulas cada vez más precisas (y más largas) para predecir el movimiento de los astros. Pero ¿son convergentes estos métodos? En otras palabras, aún admitiendo que las leyes de Newton sean exactas (cosa que sabemos que no es cierta) ¿podemos llegar a predecir con precisión arbitraria?

   Después de notables esfuerzos por parte de muchos matemáticos para demostrar la *convergencia* de los métodos perturbativos, Poincaré demostró que, en general, ello no es cierto. Las fórmulas desarrolladas por los astrónomos no llevan a resultados convergentes. Pero ello no significa que no sean útiles durante intervalos de tiempo grandes. La causa fundamental de la divergencia es la resonancia que puede haber entre los movimientos de los cuerpos.

   Ello llevó a Poincaré a interesarse por aspectos más cualitativos, intentando describir qué tipos de órbitas se pueden encontrar, en lugar de buscar la expresión de las soluciones.

   Para ello introdujo lo que se conoce como los principios de los *Sistemas Dinámicos*. Inició también muchos nuevos conceptos en otros dominios de la Matemática (como la Topología) para poder atacar esos aspectos cualitativos.

5. **El enfoque actual**. Después de casi un siglo de evolución separada del estudio de los aspectos cualitativos y cuantitativos, sabemos que cada uno aporta información interesante y no pueden ignorarse mútuamente.

   Éste ha sido el punto de vista que he estado propugnando. No se pueden hacer predicciones fiables en las aplicaciones sin tener en cuenta aspectos cualitativos del problema y, recíprocamente, para entender el comportamiento cualitativo hace falta una notable cantidad de información cuantitativa.

   Dejando muchos temas de lado, podemos encuadrar los problemas actuales de la Mecánica Celeste del modo siguiente:

   i. **Los problemas teóricos**. Son básicamente problemas de existencia de soluciones o de conjuntos de soluciones cumpliendo determinadas condiciones. Por ejemplo: a) *soluciones de equilibrio relativo*; b) *soluciones periódicas*; c) *soluciones cuasiperiódicas*; d) *soluciones caóticas*; e) *soluciones estables*; f) *mecanismos de escape y captura*; g) *pasos cerca de colisión*, etc

   ii. **Las aplicaciones**. Inicialmente consistían en aplicaciones a la Astronomía. En la actualidad la ciencia espacial proporciona un amplio abanico de problemas. Sumando ambos temas podemos citar: a) *movimiento de asteroides y cometas*; b) *asteroides con pasos próximos a la Tierra*; c) *sistemas planetarios fuera del sistema solar*; d) *satélites artificiales*; e)*misiones espaciales lejos de la Tierra*, etc

3. Modelos Matemáticos y Sistemas Dinámicos

Muchos de los fenómenos estudiados por las ciencias experimentales y de los usados en la tecnología se basan en representar el estado del sistema en un cierto instante de tiempo, t, mediante diversas variables, como posición, velocidad, concentración de una substancia, temperatura, etc. Podemos designar esas variables, de manera general, como $w(t)$.

Es importante observar que, a su vez, $w(t)$ puede ser una función que dependa, por ejemplo, de la posición x del punto considerado. Es decir, $w(t)$ es una función que asigna a un punto x un valor que podemos llamar $w(t, x)$. Se puede imaginar que $w(t, x)$ representa la velocidad del viento en el punto x y en el instante t.

La evolución con el tiempo de $w(t)$ (sea un punto en un espacio de dimensión n o una función) viene descrita por una relación de la forma

$$\frac{dw(t)}{dt} = F(t, w(t)) \tag{4}$$

o bien

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = F(t, x, w(t,x)), \tag{5}$$

donde F es una función que depende de las variables t y w (o t, x, w y derivadas de w respecto x). Las ecuaciones como (4) se llaman *ecuaciones diferenciales ordinarias* (EDO) y las del tipo (5) *ecuaciones en derivadas parciales de evolución* (EDPE). Relacionan la evolución de una variable con los valores de la misma y con las variables independientes. El objetivo es encontrar una función w tal que se satisfaga (4) o (5).

Observamos que (4) generaliza las ecuaciones del problema de N cuerpos (2) o de Hamilton (3). La variable $w(t)$ se mueve en un cierto espacio (de puntos o de funciones) que podemos seguir llamando espacio de fases o *espacio de estados* $\mathscr{E}$. La solución concreta de (4) depende del valor w_0 que tome $w(t)$ en el instante inicial $t = t_0$. Otros tipos de datos son posibles (condiciones para un cierto tiempo final $t = t_f$, condiciones de contorno, que relacionan el estado inicial y el final, etc). Asimismo podemos buscar soluciones periódicas o cuasiperiódicas. También se puede buscar soluciones que tengan un comportamiento dado cuando t tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, etc.

Una EDO (4) se llama *autónoma* si F no depende directamente de t

$$\frac{dw(t)}{dt} = F(w(t)). \tag{6}$$

Siempre es posible reducir una EDO no autónoma a autónoma o, si aparecen derivadas de orden superior al primero, siempre es posible reducir a primer orden. Un ejemplo es el paso de (1) a (2). Esas reducciones implican un aumento de la dimensión de la variable dependiente w. Nos centraremos en sistemas autónomos. Una solución de (6) para unas condiciones iniciales dadas (t_0, w_0) puede imaginarse como una curva en el espacio de estados.

El objetivo de los Sistemas Dinámicos, en un sentido amplio, consiste en estudiar cómo queda estructurado el espacio de estados $\mathscr{E}$ por las curvas solución de (6). Si el sistema estudiado depende de *parámetros* μ, debemos estudiar cómo cambia esa estructura al variar μ dentro del espacio $\mathscr{P}$ de parámetros admisibles. En realidad es muy conveniente estudiar conjuntamente el espacio de estados y parámetros $\mathscr{E} \times \mathscr{P}$.

Las curvas solución pueden estar situadas sobre superfícies o sobre objetos de dimensión superior (hipersuperfícies, variedades). Estos objetos son entonces *invariantes*, es decir, un punto sobre una superfície (o, en general, sobre una variedad) invariante, se mueve siempre sobre ella. Entender la estructura del sistema significa conocer esos objetos invariantes y su posición relativa.

Como se dijo en la Introducción debemos destacar que el estudio de una ecuación como (4) o (5) puede hacerse *independientemente de su significado físico*, aunque éste sea esencial para fijar los rangos de los parámetros y para la interpretación de los resultados.

En general (4) no tiene por qué conservar ninguna cantidad. Si el volumen en el espacio de estados disminuye (al menos en promedio, ya que es admisible que aumente de forma transitoria) diremos que el sistema es disipativo. Es posible entonces que el sistema tenga un *atractor*, hacia el que tiendan todas o parte de las soluciones. En el caso más elemental la ecuación tiene un punto fijo atractor y todas las soluciones tienden hacia él. Otro caso simple aparece cuando el atractor es una órbita periódica. Destaquemos que, aunque la ODE sea sencilla, no hay ningún motivo para que el atractor tenga también una estructura simple.

También podemos estudiar sistemas *discretos*. En lugar de considerar la evolución de manera continua se estudia el paso del estado en un cierto tiempo a un tiempo posterior. Por ejemplo, conocido el estado w_k en un cierto instante de tiempo t_k, podemos intentar describir el estado w_{k+1} en un instante posterior t_{k+1} meidnate una función G:

$$w_{k+1} = G(t_k, w_k) \tag{7}$$

o

$$w_{k+1} = G(w_k) \tag{8}$$

en el caso autónomo. El valor de t_{k+1} puede ser t_k más una cantidad constante o bien los tiempos t_k pueden corresponder a sucesivos pasos por una hipersuperfície, cruzándola siempre en el mismo sentido. Una hipersuperfície es una superfície generalizada que tiene dimensión $n-1$ si la dimensión del espacio de estados es n. Transformaciones discretas como (8) generan una dinámica por *iteración*. Excepto por el hecho de que en una iteración se considera el movimiento *a saltos*, la mayoría de métodos y propiedades son comunes con (6).

4. Algunos tipos de soluciones

Las soluciones más simples para (4) o (8) son los *puntos fijos* (o estacionarios, o de reposo, o de equilibrio), dados por $\frac{dw(t)}{dt} = 0$ y $G(w) = w$, respectivamente. Un ejemplo aparece en la Figura 1. El problema de N cuerpos no tiene puntos fijos, pero sí existen en un sistema de ejes giratorios alrededor del centro de masas. La fuerza de atracción es compensada por la fuerza centrífuga. Esas soluciones se conocen como *equilibrios relativos* y juegan un papel importante en la estructura de dicho problema. Determinarlos para un N arbitrario es una cuestión abierta, aún para el caso más simple en que las masas sean todas iguales. La Figura 1 muestra las posiciones de 8 cuerpos de masas iguales correspondientes a las dos únicas soluciones (salvo rotaciones y homotecias) que he hallado para $N = 8$ y que no tienen ninguna simetría. Otras soluciones tienen, al menos, una simetría.

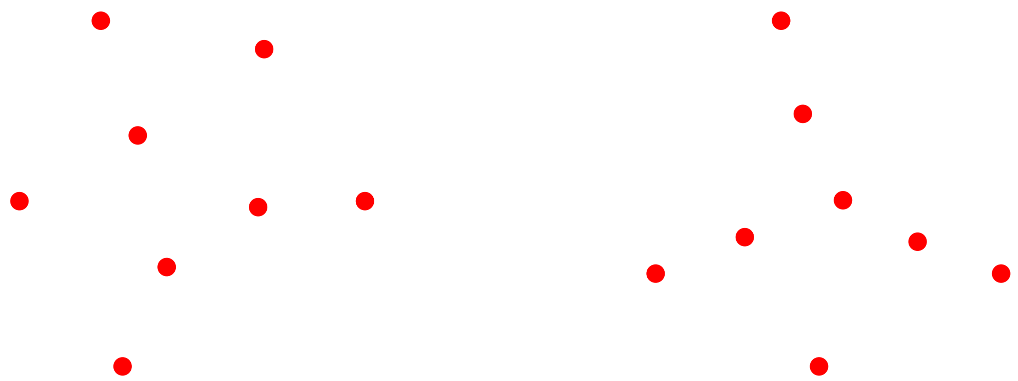


Figura 1

La Figura 2 muestra el comportamiento cerca de puntos fijos para una ecuación como (6) en un caso muy simple: un sistema lineal en dimensión 2. Los tres primeros gráficos corresponden a nodos atractores y los siguientes a foco atractor, centro y silla. Invirtiendo el sentido de las flechas los atractores se convienten en repulsores. Tanto en el caso de repulsores como en el caso de una silla, los puntos fijos son inestables.

Puntos tipo silla (y sus generalizaciones) juegan un papel esencial. Observemos que nos acercamos a ella en una cierta dirección (llamada dirección estable) y nos alejamos en otra dirección (llamada inestable).

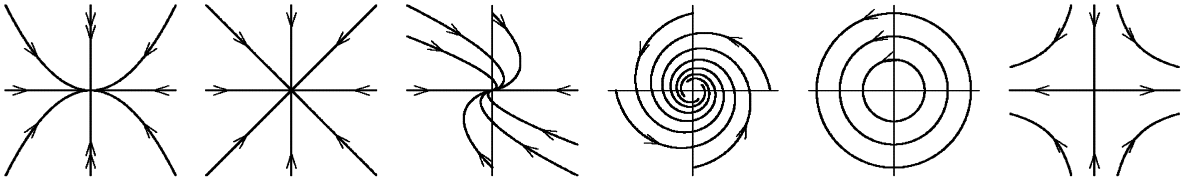


Figura 2

El siguiente tipo de solución sencilla son las soluciones periódicas. La solución vuelve al punto de partida al cabo de un cierto intervalo de tiempo T, que llamamos período.

La Figura 3 contiene unos cuantos ejemplos de soluciones periódicas del problema de N cuerpos a las que llamo *coreografías.* Todos los cuerpos se mueven a lo largo de la misma curva del plano, en una danza en la que se van persiguiendo, únicamente baja la acción de la gravitación. Existe una infinidad de tales soluciones, aún para el problema de 3 cuerpos.

Una órbita periódica (OP) puede ser estable o no, atractora, repulsora o de tipo silla. En la parte superior izquierda de la Figura 4 se muestra un esquema de una OP tipo silla. Hay soluciones que tienden a ella, formando una especie de cilindro que se llama *variedad estable*, y otras que se alejan de la misma (pero que tienden a ella si invertimos el sentido del tiempo) y que forman la *variedad inestable.* A su derecha se muestra una OP del sistema Tierra-Sol, en ejes giratorios, y algunas de las órbitas en su variedad inestable. proyectadas en el plano de la eclíptica. Para ello se consideran sólo los efectos de Tierra y Sol y se supone que la órbita de la Tierra es circular. Este modelo se llama *problema restringido de tres cuerpos* (PRTC). Notemos que, aunque el problema que consideramos es plano, hay que proyectar las órbitas en el espacio de posiciones, ya que el espacio de fases contiene también las velocidades.

Dicha OP está situada alrededor de una solución de equilibrio relativo, situado entre la Tierra y el Sol, que se llama *punto de libración colineal*, conocido ya por Euler. La misión espacial SOHO, lanzada en 1995 y aún en activo, destinada a observación solar, se mueve cerca de esta órbita (pero no en el plano sino en el espacio). Notemos que la variedad estable se obtiene de la inestable haciendo la simetría respecto al eje horizontal. Pasa cerca de la Tierra, que en este gráfico está situada en el origen. Por ello es posible utilizar dicha variedad para que la propia dinámica lleve a la órbita deseada. Ésta es de tipo silla, lo que obliga a hacer maniobras de corrección para mantener la nave de la órbita deseada.

Podemos representar de manera más simple lo que ocurre alrededor de una OP cortando la figura de la parte superior izquierda por un plano adecuado. Tenemos así un sistema discreto y la OP se convierte en un punto fijo. Ello se ilustra en la parte inferior de la Figura 4. Se muestran también las aproximaciones lineales de las direcciones estable e inestable (E^s y E^u) y un trozo de las variedades correspondiente (W^s y W^u) que, en general, se curvan. Como el sistema ahora es discreto (sólo consideramos los puntos de corte de las soluciones con el plano tomado) un punto como p pasa a $\Phi(p)$, luego a $\Phi^2(p), \Phi^3(p)$, etc, por iteración.

Por definición esas variedades W^s y W^u son *invariantes*: un punto en ellas permanece siempre sobre las mismas al ir iterando. En particular, un punto, distinto del punto fijo, puede estar simultáneamente en W^s y en W^u. Ello significa que tanto iterando hacia adelante como hacia atrás, va a tender al punto p. Dichos puntos se llaman *homoclínicos* y se hallan relacionados con la existencia de caos. Puntos próximos pueden volver infinitas veces cerca del punto fijo, como discutiremos en la Sección 5.

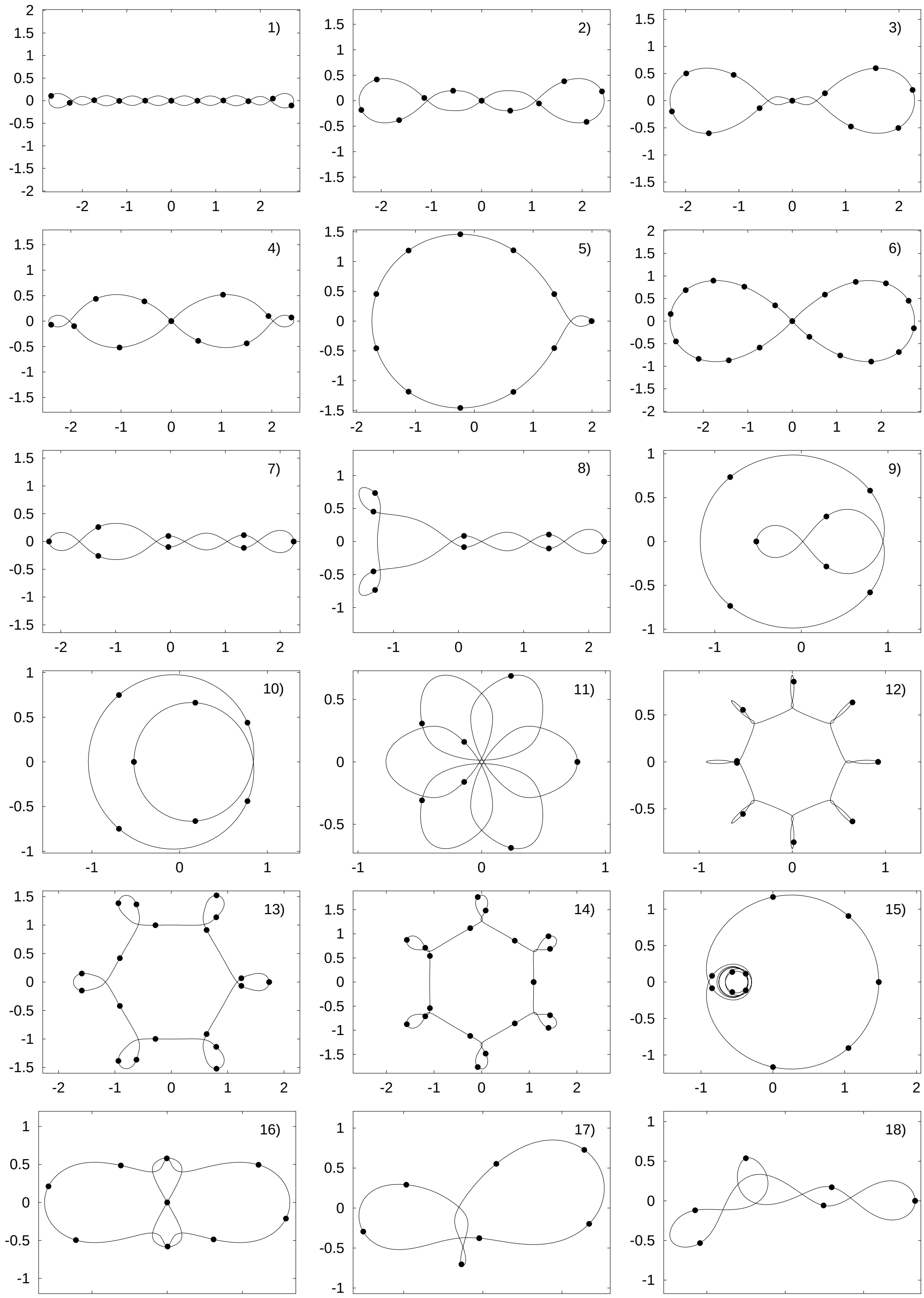


Figura 3

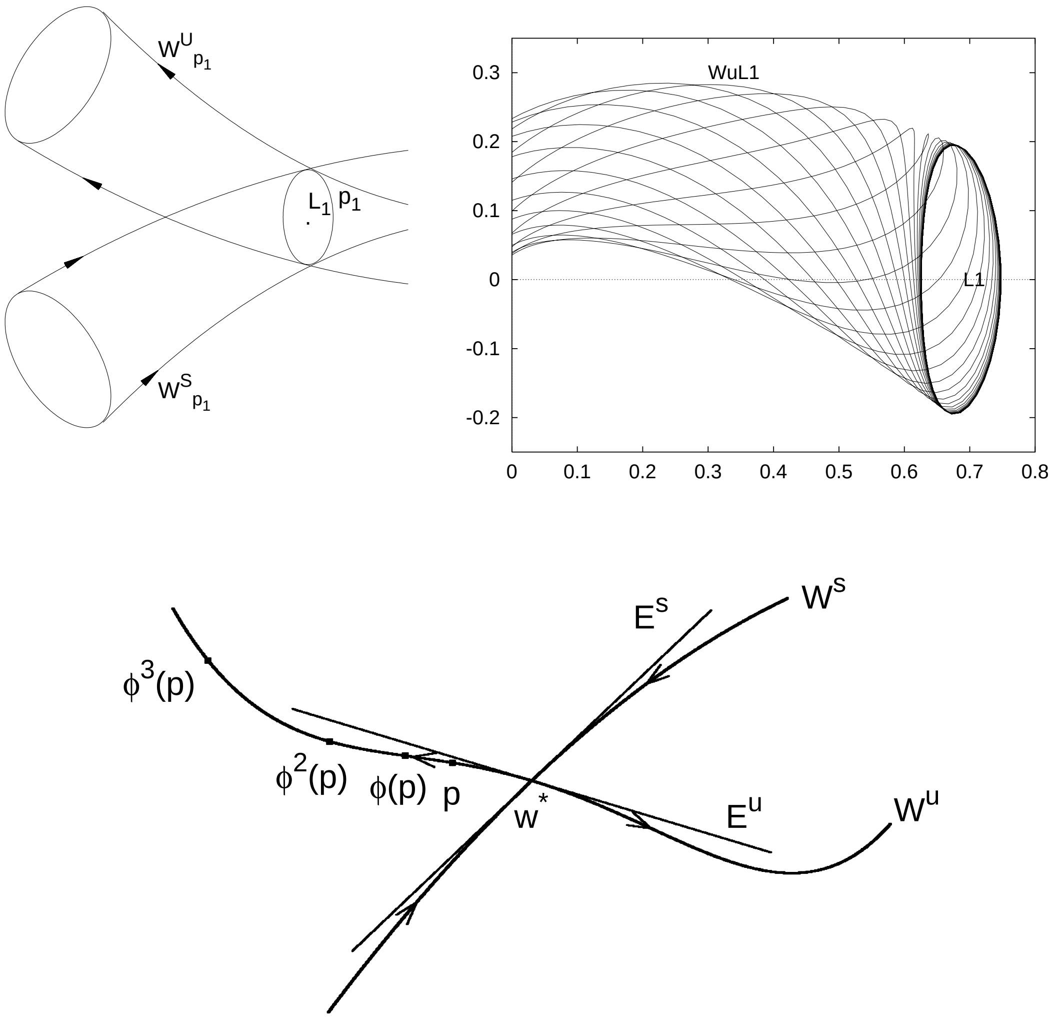


Figura 4

El siguiente tipo de soluciones a considerar son las soluciones *cuasiperiódicas*. Una función periódica $f(t)$ cumple $f(t+T) = f(t)$ para cierto $T > 0$. Si sumamos dos funciones periódicas de períodos T_1 y T_2 inconmensurables (esto es, T_2/T_1 no es un número racional), tenemos el caso más simple de funciones cuasiperiódicas. Por ejemplo $f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)$.

Una solución cuasiperiódica se mueve sobre un *toro*. Éste puede considerarse como el producto de k circunferencias y hablamos entonces de un toro de dimensión k. En el caso más simple, $k = 2$, un toro se puede ver como una cámara de neumático o como la superfície de un donut.

En la Figura 5 se muestra la proyección, en el espacio de posiciones, de dos soluciones periódicas y una cuasiperiódica, de nuevo para el PRTC alrededor de un punto de libración colineal, pero ahora en el problema espacial. La OP plana es de la misma família que la mostrada en la figura anterior. También se ve una OP casi vertical. Entre ambas la solución cuasiperiódica que se va enrollando sobre un toro de dimensión 2 hasta pasar arbitrariamente cerca de cualquiera de sus puntos. En las partes media e inferior de la misma figura se muestran dos proyecciones (esta vez en el espacio de velocidades) para cada una de dos soluciones cuasiperiódicas que existen cerca de una coreografía del problema de tres cuerpos. Mientras que en la parte media el toro tiene una geometría simple (por ejemplo, a la derecha se pueden reconocer las familiares curvas de Lissajous), en la parte inferior se observa una geometría mucho más complicada.

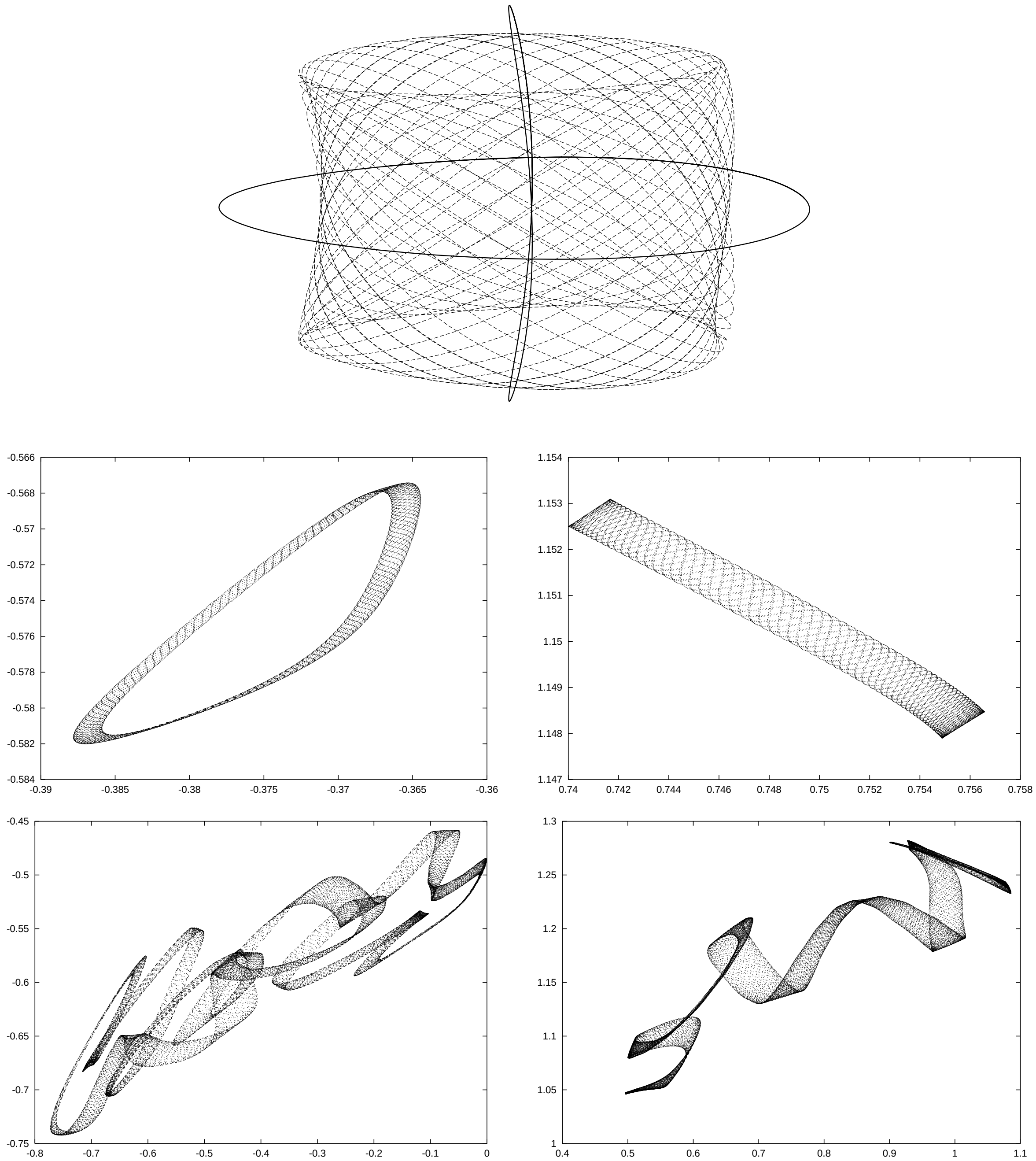


Figura 5

A continuación examinaremos algunos tipos de órbitas más complejas. Un ingrediente esencial es la existencia de un *objeto geométrico invariante* lleno de soluciones (que puede ser un simple punto, una órbita periódica, un toro lleno de soluciones cuasiperiódicas u otros objetos) que es inestable y tiene *direcciones de entrada y de salida*. Éstas dan lugar a las variedades invariantes de dichos objetos. La posición relativa de dichas variedades y sus intersecciones dan la clave para tener o no caos. Cuando las dos variedades invariantes del mismo objeto se cortan hablamos de *soluciones homoclínicas*. Éstas generalizan los puntos homoclínicos de que se ha hablado. Si una variedad inestable de un objeto corta a la estable de otro objeto distinto hablamos de *soluciones heteroclínicas*. Tal como se han definido las variedades invariantes queda claro que una variedad estable de un objeto invariante no puede cortarse a sí misma ni a la estable de otro objeto. Lo mismo sucede cambiando estable por inestable.

5. Objetos invariantes y estructura del espacio de fases: Orden y Caos

Recapitulando un poco, un punto fundamental para entender la dinámica de un sistema es el estudio de la posición en el espacio de estados $\mathscr{E}$ de distintos objetos invariantes. Éstos son simples soluciones o conjuntos de soluciones.

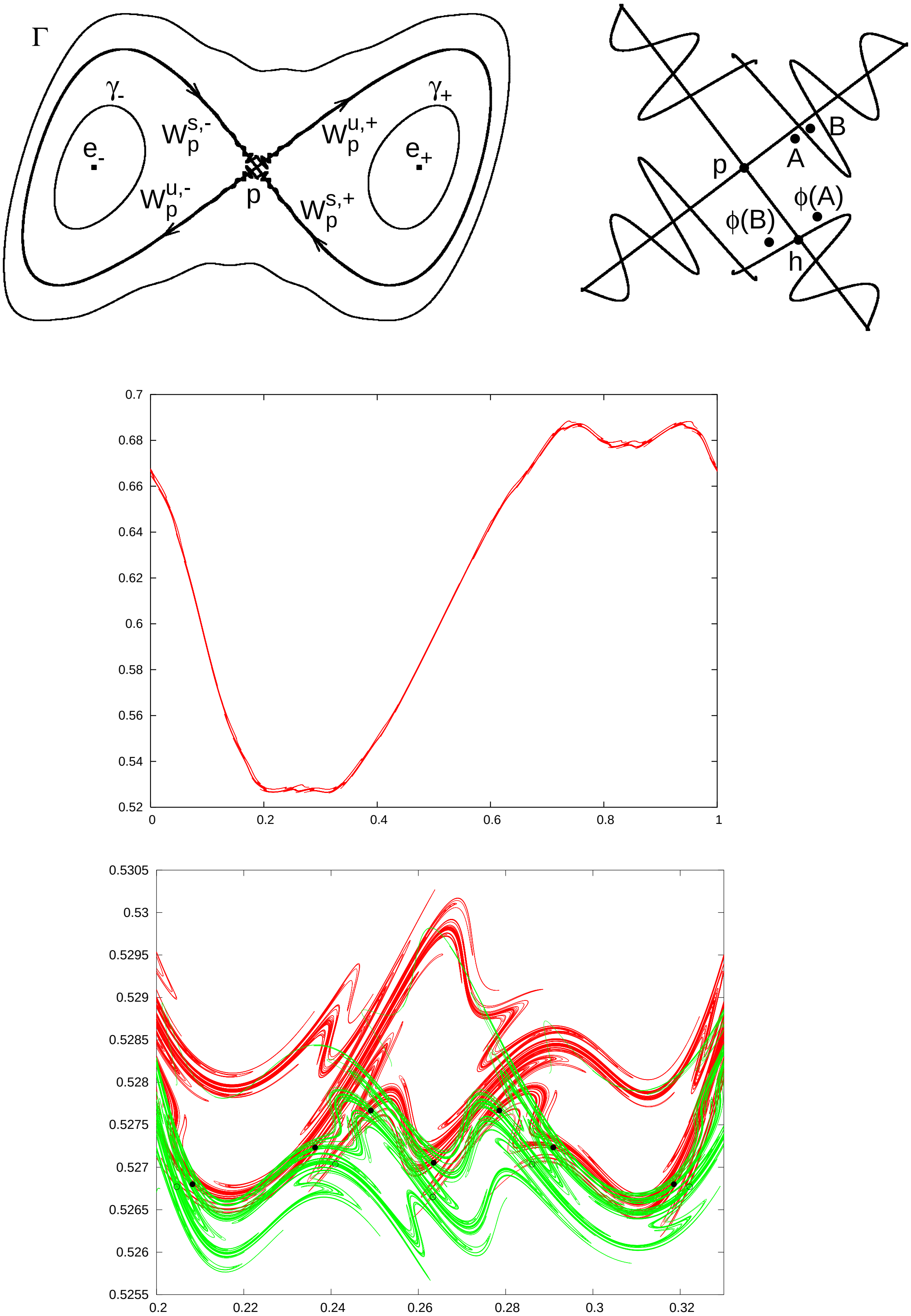
El caso más simple lo constituyen los *sistemas regulares* que tienen un orden sencillo. En el caso de sistemas hamiltonianos podemos tener todo $\mathscr{E}$ (o todo salvo un conjunto de medida cero de órbitas excepcionales) lleno de soluciones periódicas o cuasiperiódicas. Es el caso de un oscilador armónico en cualquier dimensión n. O del problema de dos cuerpos. Una función que sea constante sobre todos los puntos de una solución se llama una *integral primera global.* Un oscilador armónico en dimensión n siempre se puede reducir a n osciladores armónicos independientes en dimensión 1. Las energías de esos n osciladores nos dan n integrales primeras independientes. En el caso de problema de Kepler (movimiento de uno de los dos cuerpos respecto al otro) las dos integrales primeras independientes son la energía y el momento angular.

Un sistema hamiltoniano con n *grados de libertad* (el número de coordenadas de posición independientes) y que tiene n integrales primeras independientes (con otras condiciones técnicas) se dice *integrable.* La estructura de los sistemas integrables está bien entendida y tiene un completo orden. Son los ejemplos que se estudian en cursos de licenciatura, para que los alumnos no se vean abrumados por la complejidad de los sistemas más cercanos a la realidad.

Consideremos ahora un sistema discreto como el mostrado en la parte superior de la Figura 6. Puede imaginarse como obtenido de la parte inferior de la Figura 4 prolongando las variedades invariantes suficientemente. Observamos en la figura un punto fijo p de tipo silla cuyas variedades invariantes W^u y W^s casi coinciden. Dicho punto puede pensarse proviniendo de una OP de un sistema con dos grados de libertad en un nivel de energía fijado. También vemos dos puntos fijos e_+ y e_- que recuerdan un centro como en la Figura 2. Alrededor de ellos hay curvas invariantes como γ_+ y γ_-. Pero son invariantes por un sistema discreto. Pueden imaginarse como lo que se obtiene al cortar un toro de dimensión 2 por un plano adecuado. Otra curva invariante Γ se muestra en el exterior.

Ampliando la parte de la izquierda cerca de p tenemos la parte de la derecha. En ella vemos que las variedades W^u y W^s tienen puntos en común. Existen, por tanto, puntos homoclínicos como el punto h. Además, dichas variedades no coinciden, sino que se cortan formando ángulo. Hablamos de *puntos homoclínicos transversales.* Consideremos ahora dos puntos, como A y B, que están del mismo lado de W^u pero de distinto lado de W^s. Cuando al ir iterando vuelven a acercarse a p, obtenemos dos puntos (que he llamado $\Phi(A)$ y $\Phi(B)$) tales que, al seguir iterando, uno de ellos $\Phi(A)$ se irá hacia la derecha y el otro $\Phi(B)$ hacia la izquierda, moviéndose de nuevo cerca de W^u. El proceso se va repitiendo de forma indefinida. Esta *divergencia del comportamiento* se puede tener aunque la distancia entre A y B sea arbitrariamente pequeña. Cada vez que se pasa cerca de p se puede "escoger" ir hacia derecha o izquierda simplemente con variaciones inapreciables de la posición inicial. Hablamos de *dependencia sensible a condiciones iniciales* y se dice que tenemos *caos.* Así se ha perdido la *posibilidad de predecir* la evolución.

Sin embargo dicho caos no permite alejarse demasiado, ya que no se pueden sobrepasar curvas invariantes como las $\gamma_\pm$ o Γ. Una curva cerrada sin puntos de autointersección separa el plano en dos componentes disjuntas. Pero si aumentamos la dimensión, un toro de dimensión 2 no separa el espacio en dimensión 4. Hay varias conjeturas relacionadas con este hecho. Para el problema de $N > 2$ cuerpos, Poincaré conjeturó que, dentro del conjunto de soluciones acotadas para todo t, las *soluciones periódicas son densas.* Es decir, que todo estado inicial tiene arbitrariamente cerca estados que llevan a solución periódica. Por el contrario, Arnol'd y Herman han conjeturado que *las soluciones que escapan son también densas.* Ambas conjeturas permanecen abiertas.



Γ
γ-
γ+
e-
e+
p
A
B
ϕ(A)
ϕ(B)
h
0.7
0.68
0.66
0.64
0.62
0.6
0.58
0.56
0.54
0.52
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0.5305
0.53
0.5295
0.529
0.5285
0.528
0.5275
0.527
0.5265
0.526
0.5255
0.2
0.22
0.24
0.26
0.28
0.3
0.32

Figura 6

En el extremo opuesto de los sistemas ordenados o regulares se hallan los *sistemas ergódicos.* Esos sistemas tienen órbitas que viajan por todo $\mathscr{E}$ (por supuesto, dentro del nivel de energía inicial en el caso hamiltoniano). En los sistemas hamiltonianos *reales* se puede considerar que tienen *una parte integrable y una parte ergódica*, a menudo ambas entremezcladas.

Las partes media e inferior de la Figura 6 ilustran un ejemplo elemental, la llamada *aplicación standard* que es un paradigma del comportamiento de transformaciones discretas conservativas en el plano (o de hamiltonianos con dos grados de libertad):

$$(x,y)\mapsto(\bar{x},\bar{y})=(x+\bar{y},y+\frac{k}{2\pi}\sin(2\pi x)),$$

donde k es un parámetro y ambas x e y pueden tomarse módulo 1, con lo que $\mathscr{E}$ es un toro de dimensión 2. La parte central de la figura muestra, para $k=1$, la variedad inestable W^u_{144} de una OP de período 144 (por la iteración). La variedad estable W^s_{89} de una OP de período 89 está muy cerca (indistinguible a esa escala). La parte inferior de la figura muestra una ampliación en la que W^u_{144} y W^s_{89} se representan en rojo y verde, respectivamente. Se ven también algunos puntos de las OP y se observa la existencia de numerosos puntos heteroclínicos transversales. De hecho hay infinitos. Para este valor de k existen órbitas caóticas que viajan por gran parte de $\mathscr{E}$.

Muchos fenómenos naturales tienen una cierta disipación (de hecho, todos en mayor o menor grado). En ellos el volumen de un conjunto inicial de puntos en el espacio de estados disminuye con el tiempo. Hablamos de sistemas disipativos. Existen entonces *atractores* que, necesariamente, tienen volumen cero, lo cual no significa en modo alguno que sean sencillos. Los más simples son los puntos fijos atractores y las OP atractoras. Todos los puntos de un cierto entorno de los mismos tienden a ellos. La parte superior de la Figura 7 muestra una OP atractora para el llamado modelo de Lorenz 84 estacional

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ax-y^2-z^2+aF(1+\varepsilon\cos(\omega t))\\-y+xy-bxz+G(1+\varepsilon\cos(\omega t))\\-z+bxy+xz,\end{pmatrix},\tag{9}$$

donde se toma $a=1/4, b=4$, los parámetros F, G, ε pueden tomar valores en ciertos rangos y $\omega=2\pi/T$ con $T=73$. Estas ecuaciones constituyen un modelo sencillo de la circulación atmosférica a largo plazo y los términos periódicos representan el efecto del Sol. Se demuestra que, para todo valor de $a>0$ todas las soluciones entran y permanecen en una región acotada alrededor del origen. Como el sistema tiene excitación periódica si $F\neq 0$ y $G\neq 0$, no hay puntos fijos. Pero puede haber OP de período T o un múltiplo de T, como la mostrada en la parte superior de la Figura 7. En la parte inferior se muestra el atractor que se obtiene cambiando ligeramente F y G. Ahora no se representa una solución sino puntos de la misma cada vez que ωt pasa por 0 módulo 2π, es decir, a intervalos regulares de 73 unidades de tiempo. Observamos que los puntos del atractor tienen un cierto parecido con la OP anterior. Ello no es una casualidad, ya que existen, para esos nuevos F y G, OP inestables de aspecto similar a la de la figura superior. Además sus variedades inestables son superfícies que se pliegan de forma complicada (al estilo de la parte inferior de la Figura 6) y el atractor se encuentra sobre ellas.

Éste es un ejemplo típico de *atractor extraño.* Ese objeto atrae todos los puntos de $\mathscr{E}$ (o al menos un abierto), las órbitas se mueven de forma densa sobre él y existe dependencia sensible a las condiciones iniciales. La predicción se vuelve imposible. Pero los puntos obtenidos están siempre cerca de dicho atractor (al menos después de un corto transitorio), lo que da una *predictibilidad parcial.* La descripción del comportamiento no puede hacerse en *términos deterministas* (aunque el sistema lo sea) sino en *términos de probabilidades.* Existen probabilidades distintas de estar en distintas zonas del atractor, que se pueden apreciar en la figura por la *densidad de puntos.* El apelativo de *extraño* es debido a que no es una curva o superfície generalizada, sino una superfície *infinitamente plegada* que, en general, tiene *dimensión no entera.* Matemáticamente decimos que la estructura local es el producto de una superfície por un *conjunto de Cantor.*

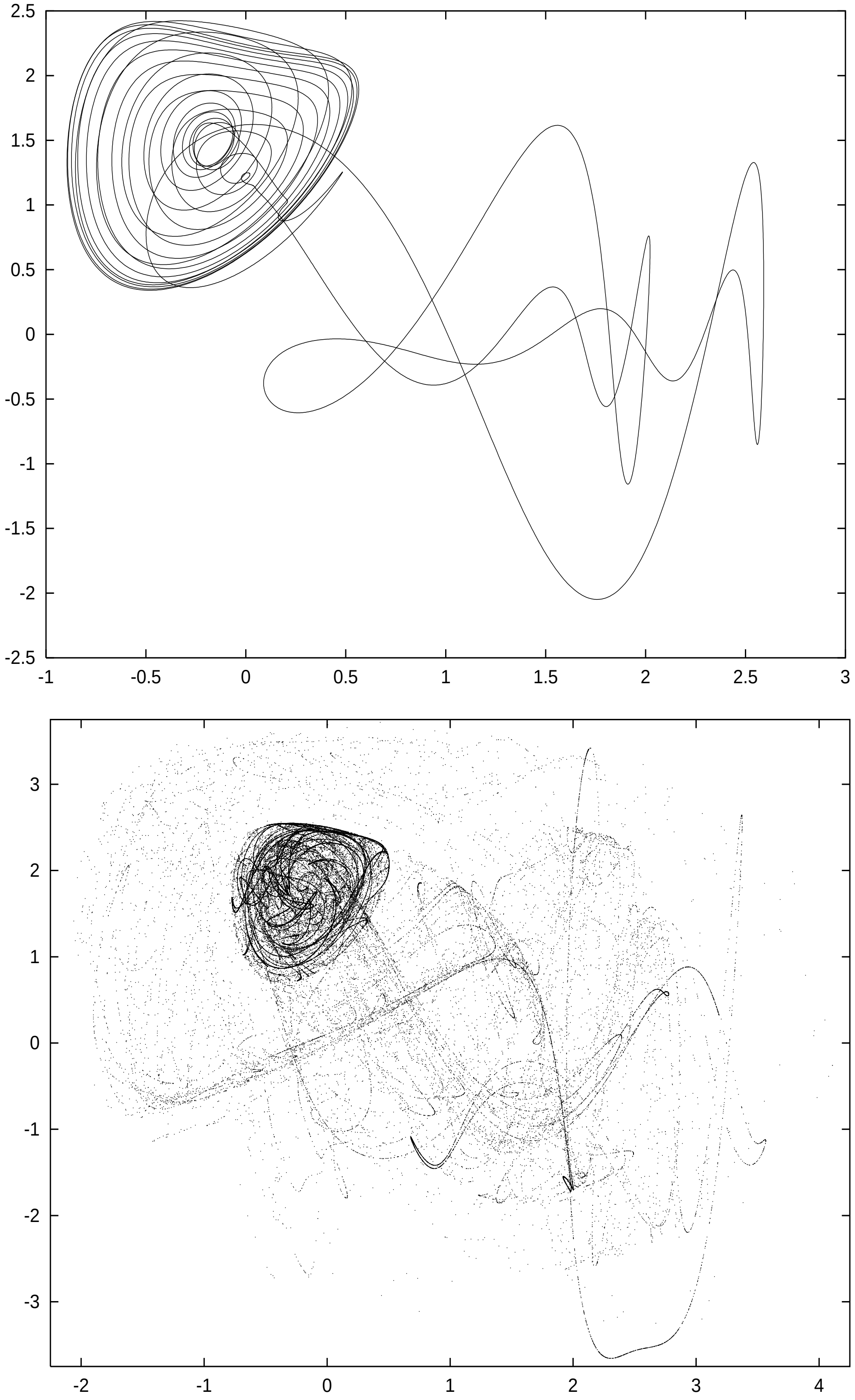


Figura 7

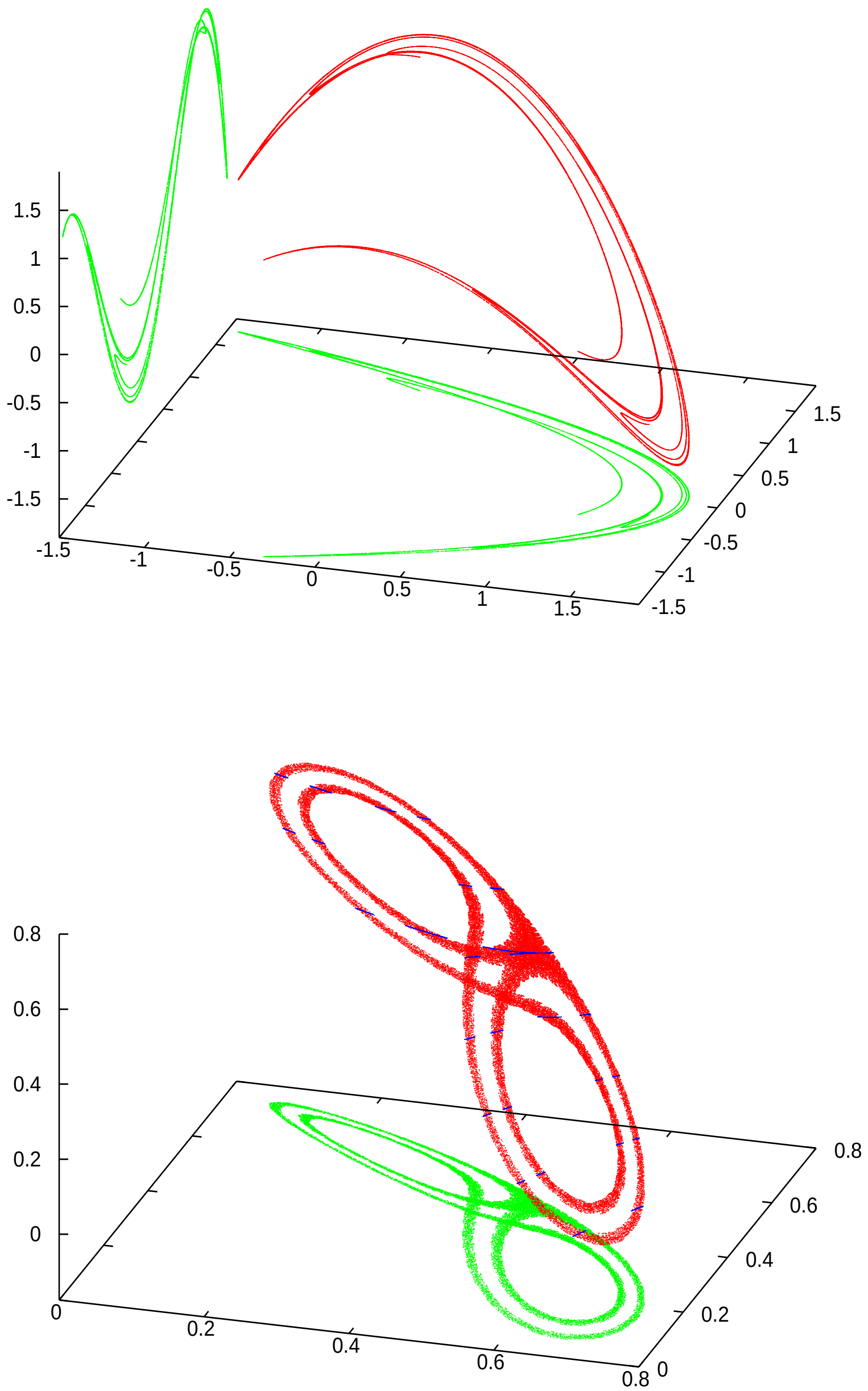

1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
0.8
0.6
0.4
0.2
0

Figura 8

Ejemplos *paradigmáticos* de atractores extraños son el *atractor de Lorenz* y el *atractor de Hénon*. No pueden aparecer en ecuaciones diferenciales autónomas en dimensión 2 que, desde el punto de vista dinámico, tienen muy pocas posibilidades para los atractores. Todo el interés dinámico aparece en ecuaciones en dimensión ≥ 3 o en sistemas discretos en dimensión ≥ 2 siempre que estos últimos tengan inversa en todos sus puntos. Pueden existir atractores extraños en sistemas discretos en dimensión 1, pero entonces hay puntos en los que no existe inversa.

La Figura 8 muestra otros tipos de atractores extraños para transformaciones discretas en dimensión 3. Corresponden al sistema

$$H_{B,M_1,M_2}: \ (x,y,z) \mapsto (\bar{x},\bar{y},\bar{z}), \qquad \bar{x}=y, \ \ \bar{y}=z, \ \ \bar{z}=M_1+Bx+M_2y-z^2, \tag{10}$$

que hemos introducido recientemente y denominamos *transformación de Hénon en dimensión tres*. Puede tener atractores para $|B|<1$ y, para valores convenientes de los parámetros M_1 y M_2, tiene atractores del tipo de Hénon (parte superior de la figura) o de Lorenz discreto (parte inferior). El atractor (sus proyecciones) se muestra en rojo (verde). Mientras que los atractores tipo Hénon consisten en curvas infinitamente plegadas, los de tipo Lorenz discreto consisten en superfícies infinitamente plegadas. Además los atractores tipo Hénon son *poco robustos*, ya que cambios muy pequeños de los parámetros pueden llevar a que el atractor cambie de forma apreciable (y, por ejemplo, se convierta en un atractor periódico). En contraste con este comportamiento, los atractores tipo Lorenz discreto son robustos frente a cambios de parámetros.

Sistemas como el (10) tienen, además, un papel mucho más importante que el considerar un ejemplo adicional. En efecto, aparecen *de forma universal* al estudiar muchos otros problemas. Siempre que se tengan ciertas condiciones (muy generales) y con cambios de variable adecuados, esos problemas pueden ser aproximados por modelos del tipo (10) u otros modelos paradigmáticos, por lo que atractores como los mostrados *deben aparecer forzosamente*.

Por último quiero presentar un tipo distinto de objetos cuyo cómputo iniciamos hace unos 15 años. Por motivos históricos mostraremos uno de los primeros resultados. Se trata de las *variedades invariantes de codimensión uno* en el espacio de fases. Esto significa que la dimensión de estos objetos invariantes es la total menos 1. Por tanto *separan localmente* el espacio de fases y actúan, en cierto sentido, como barreras. El ejemplo está relacionado con un caso conservativo: el PRTC. En sistemas disipativos este tipo de objetos separan las *cuencas de atracción* de los distintos atractores, o bien constituyen la frontera entre los puntos cuyas órbitas escapan y los que permanecen acotados. En el estudio de una reacción química, por ejemplo, separan las condiciones que llevan a que la reacción tenga lugar de aquellas para las que no ocurre.

Volvamos al PRTC. Entre los puntos de libración o soluciones de equilibrio relativo, merecen especial atención los llamados *puntos triangulares* o puntos de Lagrange. Si consideramos dos cuerpos masivos (por ejemplo Sol y Júpiter o Tierra y Luna), la posición de esos puntos forma siempre un triángulo equilátero con ellos ¿Qué podemos decir de su estabilidad? En primer lugar depende de la relación de masas. En el caso Tierra-Luna tenemos $\mu=\frac{m_L}{m_T+m_L}\approx 0{,}01215$. En segundo lugar del contexto: ya sea el problema plano o el problema espacial. En el plano para todo valor de μ entre 0 y $\mu_1=0{,}5\times(1-\sqrt{23/27})$ existe *estabilidad lineal*. Si pensamos en estabilidad no lineal, hay que excluir dos valores excepcionales de μ, que corresponden a las resonancias 1:2 y 1:3 entre las frecuencias en el punto y que son $\mu_2\approx 0{,}024294$ y $\mu_3\approx 0{,}013516$.

En el problema espacial el rango de estabilidad lineal es el mismo, pero si consideramos *estabilidad no lineal*, es aún un problema abierto. De acuerdo con la conjetura de Arnol'd-Herman deberían ser inestables. Sin embargo se ha demostrado que existe *estabilidad práctica*, esto es, si se está cerca del punto de libración en el espacio de fases, el tiempo necesario para alejarse del mismo una cantidad apreciable es del orden de la edad del sistema solar. Esto puede ser ya suficiente para muchos propósitos, como el estudio de a estabilidad de asteroides.

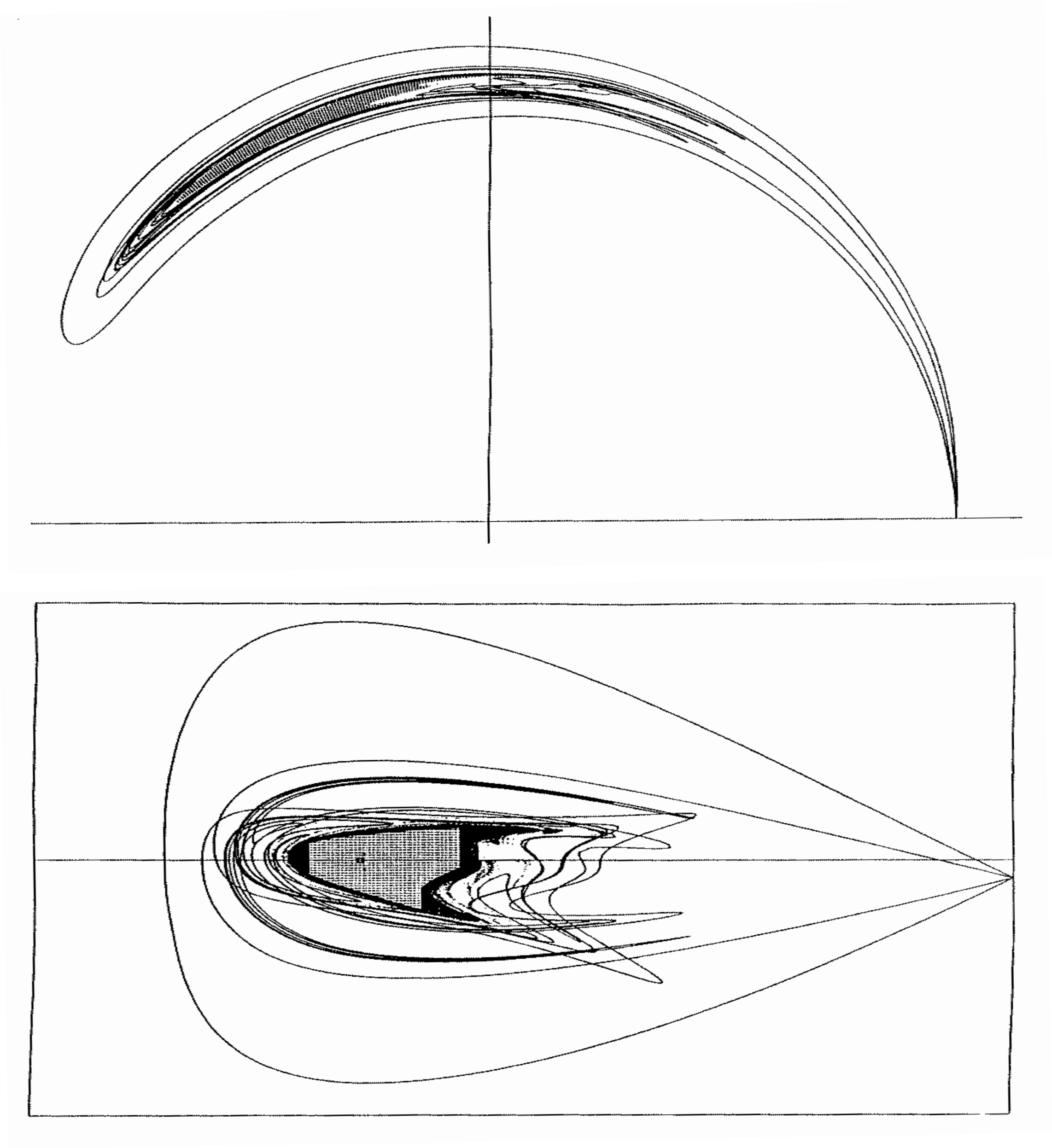


Figura 9

Comportamientos finales como el escape de la vecindad de los puntos triangulares pueden requerir tal cantidad de tiempo que incluso el modelo deje de ser válido.

Una evidencia de esta estabilidad la dan los *asteroides troyanos* en el caso Sol-Júpiter. Permanecen relativamente cerca de los puntos de Lagrange de este sistema, a pesar de la influencia de los otros planetas y de que la órbita de Júpiter no es circular. La estabilidad es *robusta.* Entonces ¿por qué no se observa algo parecido en el sistema Tierra-Luna? La respuesta es simple: el efecto del Sol es demasiado grande. Pero sí que existe una zona estable a cierta distancia de los puntos que forman triángulo equilátero con Tierra y Luna, en su plano de movimiento, en cada instante. En esta zona hay órbitas que tienen una notable amplitud en la dirección ortogonal a dicho plano. Cuando lo atraviesan lo hacen con una velocidad notable. Por ese, si existen algunas rocas siguiendo este movimiento, son difíciles de observar.

Pero no nos preocupamos de la zona de estabilidad local sino de la *zona de estabilidad global.* Naturalmente, en el caso espacial esa estabilidad hay que entenderla en el sentido práctico (durante intervalos de tiempo muy grandes) y no de forma indefinida. Nos centraremos en el problema plano para el sistema Tierra-Luna. Para ello hay que considerar otro punto de libración: el colineal que está en la línea Tierra-Luna en posición aproximadamente simétrica de la Luna respecto a la Tierra y que se conoce como punto L_3. Este punto tiene un comportamiento local como el producto de una silla por un centro. Por tanto tiene una *variedad central* (puntos que no se alejan o acercan al punto de forma exponencialmente rápida) de dimensión 2. A su vez esta variedad tiene *variedades estable e inestable de dimensión 3*, es decir, de *codimensión 1* en $\mathscr{E}$. Esos son los objetos que buscamos.

Para interpretar el papel que juegan podemos hacer lo siguiente. Consideremos en el plano del movimiento condiciones iniciales con *velocidad sinódica* igual a cero. Esto es, en reposo respecto a ejes giratorios en los que Tierra y Luna no se mueven. Según sea la posición del punto inicial las órbitas escapan más o menos rápidamente o *permanecen confinadas* alrededor del punto triangular, sea de forma permanente o al menos por un largo intervalo de tiempo (por ejemplo, un millón de años). Prestamos atención a los puntos que no escapan y, en especial, a la frontera de dicho conjunto.

Por otra parte podemos calcular las variedades estable/inestable de la variedad central de L_3. Para poder comparar los resultados con el cálculo anterior debemos buscar los puntos en esas variedades en los que la velocidad sinódica es cero: $dx/dt = 0$ y $dy/dt = 0$. Ésto nos da dos condiciones para los puntos de objetos de dimensión 3. Por tanto obtenemos sendas curvas $\mathscr{C}$. Éstas se pliegan de manera complicada y delimitan la *frontera de estabilidad* anterior. Se muestran en la Figura 9. En la parte superior se presentan en coordenadas sinódicas cartesianas y en la inferior se representan en polares, con el ángulo en el eje horizontal y el radio en vertical. En la gráfica inferior la línea horizontal corresponde a la distancia Tierra-Luna. La curva (sin pliegues) exterior es la llamada *curva de velocidad cero* CVC que pasa por L_3 y que nos da una referencia de tamaño. Para otros valores de μ la situación es similar, con $\mathscr{C}$ acotada por la CVC, y es bien conocido que la anchura de la zona contenida dentro de dicha CVC es del orden de $\sqrt{\mu}$.

6. El papel de los ordenadores en el estudio de los sistemas

Gran parte de la fenomenología que presentan las ecuaciones diferenciales, la Mecánica Celeste y los Sistemas Dinámicos ha sido descubierta gracias a disponer de medios de cómputo rápidos. El primer ejemplo de atractor extraño, debido a Lorenz, apareció en 1963 en una simplificación de un problema meteorológico, y el primer ejemplo de sistema hamiltoniano con 2 grados de libertad con evidencia numérica de no integrabilidad apareció en 1964, gracias a Hénon y Heiles, estudiando un modelo simplificado de galaxia.

Desde entonces la explosión de fenómenos observados numéricamente ha ido en paralelo con el incremento de velocidad y memoria de los ordenadores. En muchos casos precediendo a la observación experimental; en otros clarificando los fenómenos observados experimentalmente. Ello, a su vez, ha supuesto un estímulo considerable en los aspectos teóricos.

Los ordenadores juegan un múltiple papel en este desarrollo. Veamos algunos aspectos:

1. *Simulación del comportamiento de los sistemas.* Es, sin duda, el aspecto más utilizado. Sirve tanto para ayudar en el diseño de modelos adecuados, como para hacer algún tipo de predicción (determinista o probabilista) a partir de datos iniciales concretos, una vez el modelo ha sido validado (es decir, que los resultados que da concuerdan aceptablemente con la observación experimental).

   El poder hacer simulaciones para un sistema que depende de parámetros es esencial para determinar los valores de los mismos o para optimizar el resultado en el diseño industrial.

Es mucho más barato hacer una simulación numérica que un prototipo.

Asimismo podemos simular el comportamiento de un sistema que requiere control para optimizar la eficiencia del mismo.

2. *Cálculo de soluciones periódicas, cuasiperiódicas, variedades invariantes.* En general cálculo de objetos invariantes. Menos practicado pero muy relevante, ya que no nos interesamos en una solución concreta (o unas pocas) sino en aspectos más globales. Ello repercute en el diseño (por ejemplo, en el diseño actual de misiones espaciales) ya que se consideran así la *totalidad de soluciones* y no sólo algunas. Además, soluciones para las que se desean ciertas propiedades especiales pueden ser prácticamente imposibles de obtener, si no se tiene una idea clara de la dinámica global.

   Asimismo se pueden estudiar *bifurcaciones* de las distintas órbitas para saber cuando cambian sus propiedades en función de parámetros, se pueden continuar soluciones u objetos invariantes al variar dichos parámetros, etc.

   Tanto este aspecto como el anterior pueden evidenciar cierto tipo de fenómenos que sugieran cómo atacar problemas teóricos. Recíprocamente, pueden servir para intentar verificar conjeturas.

3. *Cálculo de indicadores de la dinámica.* Existen diversos indicadores numéricos de la dinámica de un sistema, como los *números de rotación* y *análisis de frecuencias*, que permiten evidenciar dinámica cuasiperiódica y resonancias y los *exponentes de Lyapunov*, que miden las velocidades con que se alejan (o acercan) puntos próximos a una órbita dada y en una dirección determinada. Otros indicadores permiten calcular dimensiones de atractores, propiedades estadísticas, etc.

   La Figura 10 muestra ejemplos del uso de los exponentes de Lyapunov. En la parte superior se ilustra el llamado *ejemplo de difusión debido a Arnol'd*, un sistema paradigmático de hamiltoniano con 3 grados de libertad. Las variables de la figura son aquí frecuencias (que equivalen a variables de acción). Las zonas en color verde corresponden a dinámica regular: son movimientos en toros invariantes. Las rojas a movimientos caóticos. Las zonas en blanco a dinámica débilmente caótica. Se aprecia cómo las zonas caóticas están asociadas a una tupida red de resonancias.

   La parte inferior muestra los resultados de un estudio de (10) para $B = 0{,}7$ con (M_1, M_2) en los ejes de coordenadas. El código de color para las distintas zonas, en función del tipo de atractor, es: verde para puntos fijos; azul claro para curvas invariantes; amarillo para atractores tipo Hénon; rojo para atractores tipo Lorenz con primer exponente de Lyapunov positivo y el segundo cercano a cero; azul para atractores tipo Lorenz con los dos primeros exponentes de Lyapunov claramente positivos.

   Ambos ejemplos ilustran cómo se puede obtener una buena idea del comportamiento global mediante el uso de exponentes de Lyapunov.

4. *Manipulación simbólica.* Si se quieren hacer cálculos de forma analítica, como el obtener teorías perturbativas, pueden necesitarse miles o millones de términos en los desarrollos. Es impensable llevarlos a cabo sin ayuda de programas eficientes de manipulación simbólica.

5. *Demostraciones asistidas por ordenador.* La demostración rigurosa de la existencia de ciertos tipos de soluciones se basa muchas veces en métodos perturbativos. A menudo, si la perturbación es demasiado grande no se sabe cómo aplicarlos. Se pueden seguir entonces una estrategia basada en: a) demostrar que el problema se reduce a comprobar un cierto número (posiblemente muy grande) de acotaciones, y b) llevarlas a cabo rigurosamente

mediante el ordenador. Para ello hay que trabajar típicamente con muchas cifras decimales y utilizar análisis intervalar para tener un control total del error.

6. *Comunicación y difusión.* Por último, pero no menos importante, el uso de la red a través de ordenadores permite comunicaciones rápidas con colaboradores, colegas, acceso a la información y amplia difusión de los resultados.

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que mientras los ordenadores han permitido un avance considerable en el apartado de simulación, no todos los resultados numéricos que se obtienen son cuidadosamente analizados e interpretados. Hay abundantes ejemplos en los que los resultados cambian si se aumenta de forma correcta la precisión con que se hacen los cálculos. Así vemos que sistemas que son integrables pueden parecer caóticos y viceversa; atractores regulares pueden parecer extraños y viceversa. En general hay que considerar métodos de cómputo distintos, relacionar los resultados con las predicciones teóricas y analizar los cambios frente a variaciones de parámetros, para intentar validar resultados numéricos.

La Figura 11 muestra un ejemplo en este sentido. Consideremos el sistema

$$(x, y) \mapsto \left(1 - [1 + \varepsilon(1 + \sin(2\pi t))]x^2, t + \gamma/m\right). \tag{11}$$

Se trata de una aplicación logística excitada de forma cuasiperiódica. La variable t se considera módulo 1, ε es un parámetro, γ el número de oro ($\gamma = 0{,}5(\sqrt{5} - 1)$) y tomamos $m = 10$. Propiamente no se trata de un sistema dinámico ya que la primera parte (correspondiente a x) o no es invertible o no lo es de forma única. Para valores de ε desde 0 hasta $\varepsilon_c \approx 0{,}317$ el atractor está formado por 2 curvas, gráficos de funciones que dependen de t: $x = f_1(t)$ y $x = f_2(t)$. Los puntos pasan de una curva a la otra por iteración. A partir de ε_c *parece formarse un atractor extraño.* Sin embargo el *exponente de Lyapunov en la variable x es negativo.* lo que da evidencia de que el atractor *no es caótico.*

En la parte superior izquierda de la figura se muestra un millón de puntos del atractor para $\varepsilon = 0{,}35$ representando los puntos de la forma $((x + 0{,}8)\cos(2\pi t), (x + 0{,}8)\sin(2\pi t))$ ¿Podemos decir que es una curva (o un par de curvas)? En la parte media de la figura se representan los mismos puntos unidos por rectas, con la variable t en el eje horizontal y x en el vertical. Realmente parece difícil que sea una curva. Pero ampliando reiteradamente la escala en la t llegamos a la curva en azul en la parte inferior, en la que se muestra *la parte más plegada de la curva anterior.* En este gráfico representamos en horizontal la variable $(t - 0{,}51940583438188603) \times 10^{21}$ y se tiene evidencia, pues, de que se trata de una curva de la forma $x = f(t)$, de acuerdo con la teoría. Ciertamente la pendiente $|df(t)/dt|$ alcanza valores del orden de 10^{19}, pero sigue siendo una curva. Para los cálculos he tenido que utilizar 50 cifras decimales y efectuar numerosas comprobaciones independientes, pero se logra así clarificar la dinámica.

Por contra, si $\varepsilon = 0{,}38$ la parte superior derecha de la figura muestra también un millón de puntos del atractor. Pero en el mismo intervalo de anchura 2×10^{-17} usado para $\varepsilon = 0{,}35$ los iterados, que se muestran en rojo en la parte inferior, no parecen estar en una curva, en buen acuerdo con el hecho de tener exponente positivo en la dirección de la x.

Quiero comentar, por último, el esfuerzo de cómputo que representa un estudio detallado de problemas de los tipos citados. Un cálculo para 10^7 valores de los parámetros y/o de las condiciones iniciales, haciendo 10^6 pasos de integración para cada uno de ellos en un sistema en dimensión baja (por ejemplo, 4), tal que cada paso equivalga a 10^4 operaciones de suma, requiere un total de 10^{17} operaciones, es decir 10^8 Gigaflop. En un PC con sistema operativo eficiente, compiladores eficientes y programando de forma óptima supone una tarea que llevaría entre 3 y 4 años sin interrupción. ¿Cómo solucionarlo? Simplemente con redes de PC o, mejor, de servidores.

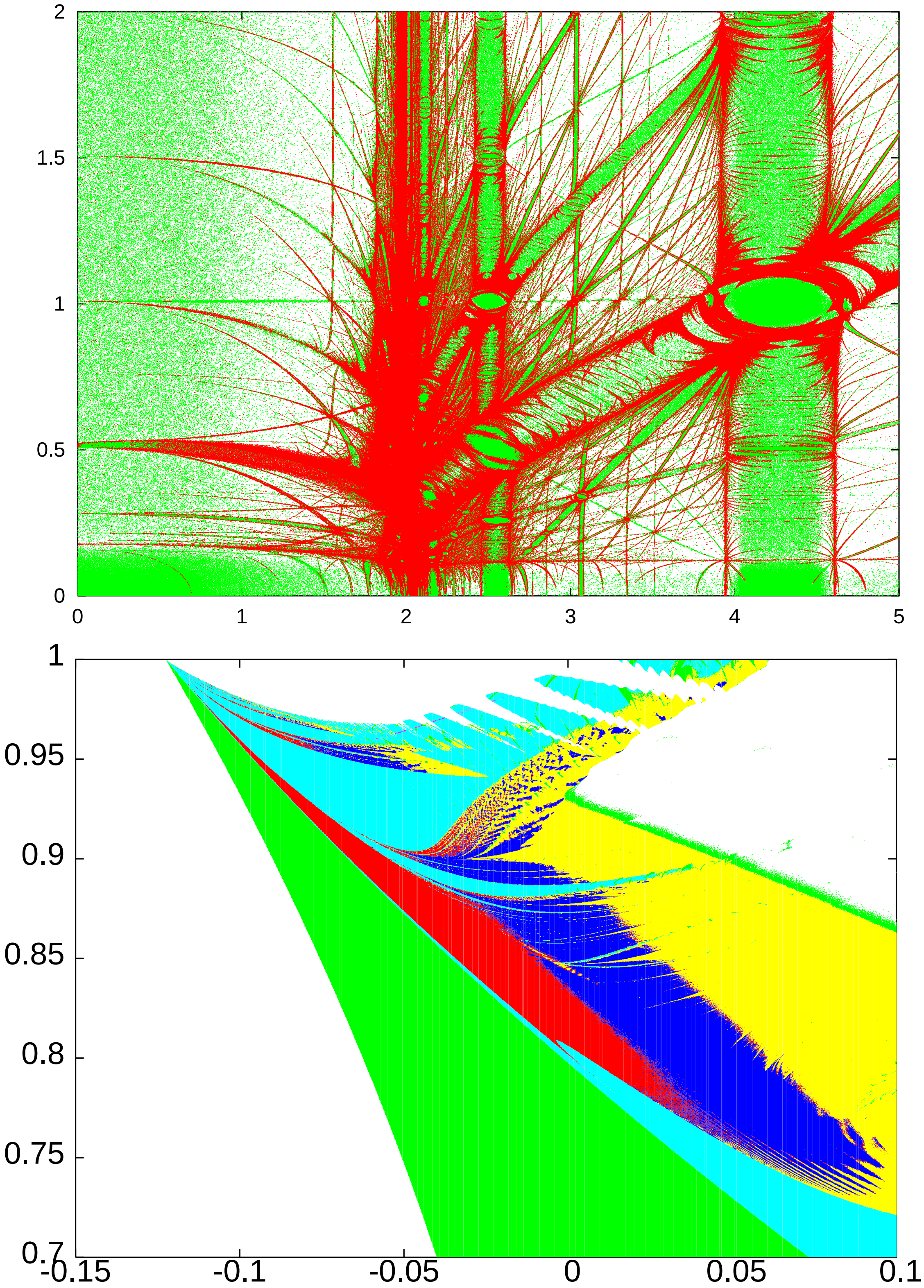


Figura 10

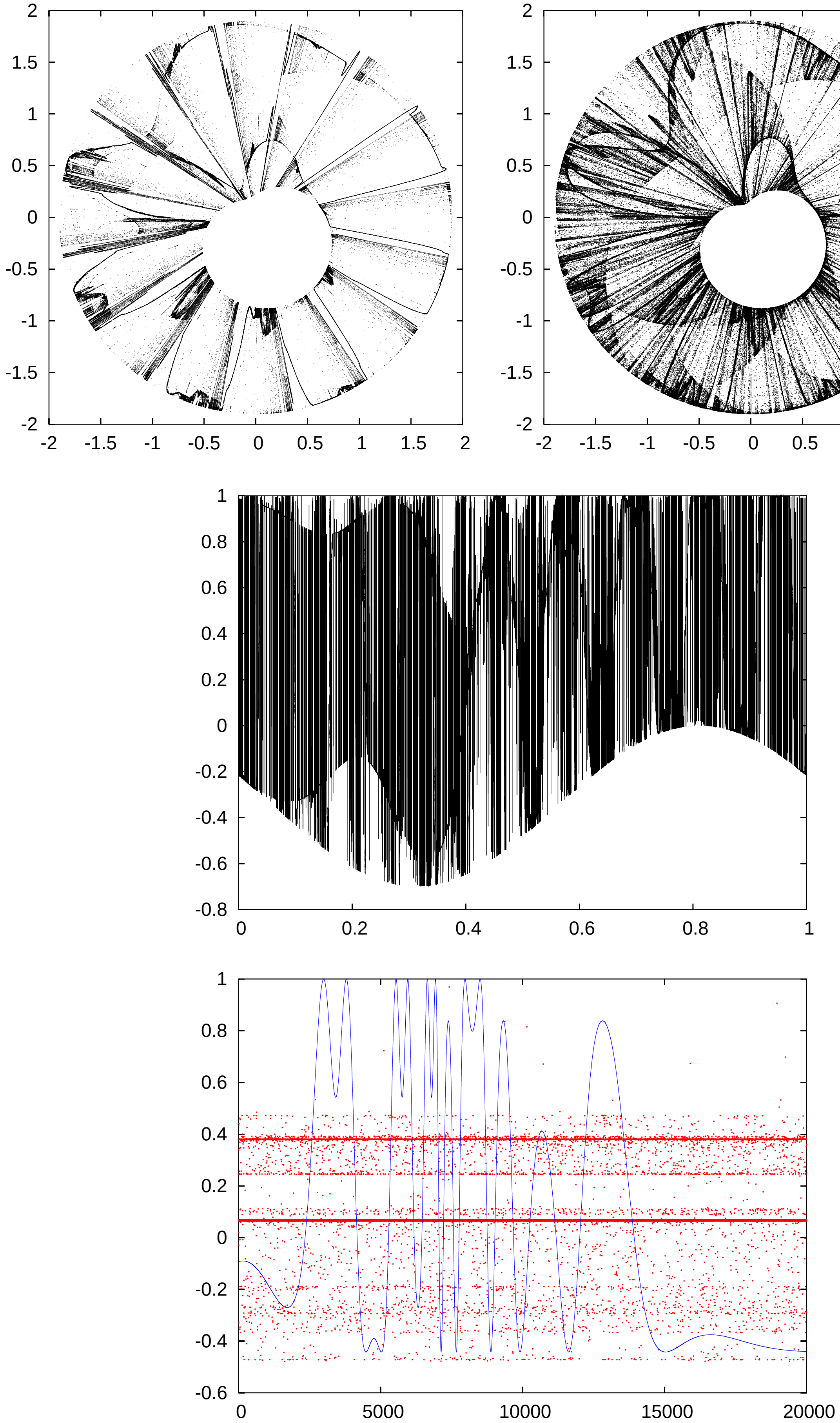

2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
-0.6
0 5000 10000 15000 20000

Figura 11

Por este motivo nuestro grupo de investigación se inició en esa dirección hace unos 8 años y construímos nuestro propio cluster, desarrollando todos los programas necesarios y efectuando mantenimiento y actualizaciones. Con los recursos actuales (a marzo de 2005) un cómputo del tipo mencionado necesita algo menos de 10 días y esperamos reducirlo a menos de 5 días dentro del presente año.

Ello no hubiera sido posible sin la maestría, entusiasmo y disponibilidad de mis colegas Joaquim Font, Àngel Jorba y, muy especialmente, Jaume Timoneda. A todos ellos mi reconocimiento por la labor que llevan a cabo.

7. Expectativas para el futuro

La situación actual es prometedora e interesante, pero se encuentra en un punto algo delicado. Por una parte se puede prever:

a) El dominio de aplicabilidad de los Sistemas Dinámicos va a ampliarse, ya que proporcionan una herramienta única para entender sistemas complicados. Los aspectos cualitativos y cuantitativos van a fusionarse.

b) La modelización fiable se va a extender más allá de los dominios "clásicos" (física, química, partes de la técnica) hasta llegar a la biología y la medicina. Pero ésto va a exigir un considerable esfuerzo y cambio de mentalidad (y no sólo por parte de los matemáticos).

c) Los resultados teóricos van a tender más hacia los métodos constructivos y eficientes que hacia las puras pruebas de existencia. Muchos teoremas demuestran un cierto resultado suponiendo que un cierto parámetro ε *es suficientemente pequeño.* Creo que se va a hacer un esfuerzo para determinar el dominio de aplicabilidad y qué sucede cuando ε sobrepasa un cierto valor crítico.

d) Todas las cuestiones relativas a la validación de cálculos numéricos (estimaciones de error rigurosas y eficientes, demostraciones largas asistidas por ordenador, cómputos de objetos invariantes) puede convertirse en una tarea rutinaria en pocos años.

e) Un apartado al que se ha dedicado poco esfuerzo hasta el presente es el estudio de los regímenes transitorios. Para ciertos problemas son más interesantes que el comportamiento a largo plazo. Depende de las escalas de tiempo del fenómeno estudiado. Son previsibles buenos avances en esta dirección.

f) Por razones de sencillez teórica y práctica, el estudio de los Sistemas Dinámicos está más avanzada para ODE que para PDE. Espero que en este último campo las técnicas de los Sistemas Dinámicos permitan avances espectaculares en un futuro próximo.

Pero por otra parte hay algunas consideraciones negativas:

i) Desde el punto de vista teórico la Matemática tiene herramientas de amplio dominio de aplicabilidad pero que proporcionan poca información, y otras que, al revés, dan una información detallada pero muy localizada. Parece que deben introducirse nuevos campos que aprovechen las propiedades de ambos enfoques.

ii) Los equipos de investigación tienen una estructura demasiado vertical, dentro de un área determinada. En las aplicaciones de alto nivel científico o tecnológico eso no tiene sentido. Deberían abrirse para incluir profesionales de otras áreas. En particular creo que en España no se aprovecha el potencial de los matemáticos.

iii) El número de estudiantes de matemáticas está decreciendo. Ello es natural dado que exige un esfuerzo considerable: el ejercitarse en el *razonamiento lógico* siempre acostumbra a ser cansado; además hay que *saber hacer* las cosas y *hacerlas*. Los estudios a nivel secundario no van precisamente en esta dirección. Prácticamente no existe la posibilidad de desarrollar una carrera como investigador en matemáticas, no está suficientemente considerado ni es aprovechado.

iv) Un exceso de *información* (casi siempre muy superficial) anula *la curiosidad y la reflexión*, que son los motores fundamentales de la investigación. También disminuye *la crítica*, que es una actitud necesaria en el investigador (de hecho, en todo ciudadano). Nadie debe creerse algo por el hecho de afirmarlo el Dr. X o el profesor Y o el académico Z. Como ejercicio les animo a tomar los ejemplos que he expuesto y a verificar, independientemente, los resultados presentados.

v) En los aspectos computacionales existe una exagerada tendencia a usar programas como *caja negra*. Son útiles para cosas rutinarias, pero no en las fronteras del conocimiento. El número de especialistas en cálculo científico es muy bajo. Y si ya bastan para las necesidades del país, mucho peor.

Espero que en los próximos 30 años se materializen las previsiones en los aspectos positivos y se hayan remediado los negativos.

8. Conclusiones

Los Sistemas Dinámicos ofrecen un contexto, un fundamento teórico y una metodología, tanto en los aspectos abstractos como concretos que los hace aplicables a todas las ciencias y a la técnica. Por otro lado permiten estudiar no sólo como se comporta una solución de cierto modelo matemático sino también tener características de la totalidad de soluciones.

Asimismo se pueden analizar cómo son los posibles cambios en el comportamiento de un fenómeno si hay pequeños errores en los modelos del mismo.

Por otro lado aspectos cualitativos y cuantitativos se complementan y se refuerzan mútuamente. Existen modelos paradigmáticos cuya utilidad se manifiesta por la universalidad con que aparecen.

El desarrollo de los Sistemas Dinámicos, de la Matemática y de la ciencia en general (seguida de cerca por la tecnología) se halla en un punto muy interesante. La humanidad tiene planteados muchos problemas y tiene la capacidad para resolverlos. Sólo hace falta la voluntad real de hacerlo. Para ello habrá que cambiar, posiblemente, los motores que mueven la sociedad actual.

Referencias a los temas mencionados en estas notas se pueden encontrar en diversos artículos y preprints en `http://www.maia.ub.es/dsg` (sólo parcialmente actualizado) y en las citas que aparecen en los mismos.