Cálculo de soluciones cuasi-periódicas reducibles en un computador paralelo

Àngel Jorba[1] Estrella Olmedo[1]

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar un algoritmo paralelizable de cálculo de soluciones cuasi-periódicas reducibles en sistemas dinámicos de dimensión moderada. Este método se basa en un proceso con convergencia cuadrática que obtiene la órbita cuasi-periódica a la vez que calcula la matriz reducida de Floquet para la linealización de su comportamiento normal. El método se ilustra con una aplicación a un problema de mecánica celeste.

Introducción

Consideramos un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^n$ y un vector de frecuencias $\omega \in \mathbb{R}^d$ de manera que se genera el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(x, \theta), \\ \bar{\theta}_i &= \omega_i + \theta_i, \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, d\}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ y $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_d)$.

Observemos que si las componentes de ω no son racionalmente independientes, entonces podríamos eliminar una de ellas de manera que $\omega \in \mathbb{R}^{d-1}$. Por tanto a partir de ahora vamos a pedir que ω tenga componentes racionalmente independientes.

Definición 1 *Decimos que $x(\theta)$ es una solución cuasi-periódica de (1) con vector de frecuencias $\omega \in \mathbb{R}^d$ si se cumple:*

$$f(x(\theta), \theta) = x(\theta + \omega), \qquad \forall\, \theta \in \mathbb{T}^d. \tag{2}$$

Para simplificar la exposición supondremos que el vector de frecuencias de la solución buscada coincide con el vector de frecuencias ω que define la dinámica de la variable θ en (1). Sin embargo, queremos resaltar que el método que presentamos tambien puede aplicarse para buscar soluciones con un número mayor de frecuencias.

Supongamos que tenemos una solución del tipo (2), y que nos interesa estudiar el comportamiento del sistema (1) en un entorno de dicha solución. Sea $h(\theta)$ un pequeño desplazamiento con respecto a un punto arbitrario de $x(\theta)$. Entonces tenemos:

$$f(x(\theta) + h(\theta), \theta) = f(x(\theta), \theta) + D_x f(x(\theta), \theta) h(\theta) + O(\|h(\theta)\|^2).$$

Como $x(\theta)$ es solución, se cumple $f(x(\theta),\theta) = x(\theta+\omega)$ y, por tanto, la aproximación lineal al comportamiento normal de la solución queda descrito por el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A(\theta)x, \\ \bar{\theta}_i &= \omega_i + \theta_i, \qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,d\}, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $A(\theta) = D_x f(x(\theta),\theta)$.

Definición 2 *El sistema (3) se llama reducible si existe un cambio de variables (real o complejo), $x = C(\theta)y$, de manera que (3) se transforma en:*

$$\begin{aligned} \bar{y} &= By, \\ \bar{\theta}_i &= \omega_i + \theta_i, \qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,d\}, \end{aligned}$$

donde la matriz $B \equiv C^{-1}(\theta+\omega)A(\theta)C(\theta)$ no depende de θ. En este caso llamamos a $C(\theta)$ cambio de Floquet y a B matriz reducida de Floquet.

Esta claro que la dinámica de este sistema es fácil de estudiar a partir de los valores propios de la matriz B. En general, no se puede asegurar que (3) sea reducible.

Definición 3 *Diremos que una solución cuasi-periodica $x(\theta)$ de (1) es reducible si el sistema lineal (3) lo es.*

Nuestro trabajo ha consistido en estudiar un método numérico para calcular soluciones cuasi-periódicas reducibles.

Método de cálculo

El método que presentamos a continuación para el cálculo de soluciones cuasi-periódicas reducibles consiste en la implementación numérica de la demostración analítica que se hace en [3]. Se trata de un método iterativo de convergencia cuadrática, que a partir de una solución aproximada y una aproximación al cambio de Floquet, nos da una aproximación mejor. Para ello en cada iteración se hacen dos pasos: uno para encontrar una mejor aproximación de la solución y otro para encontrar una mejor aproximación del cambio de Floquet.

Las condiciones necesarias para iniciar el método son:

1 Una aproximación a la solución cuasi-periódica de orden ε, $x_0(\theta)$, de manera que si llamamos:

$$y_0 = \bar{x}_0 - f(x_0,\theta),$$

entonces $\|y_0\| \sim \varepsilon$.

2 Una cambio de coordenadas $x = C_0(\theta)y$ y una matriz constante B_0, tal que si aplicamos esta transformación al sistema:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A_0(\theta)x, \\ \bar{\theta}_i &= \omega_i + \theta_i, \qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,d\}, \end{aligned}$$

donde $A_0(\theta) = D_x f(x_0(\theta), \theta)$, resulta un sistema lineal "casi" reducido, es decir un sistema del tipo:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= (B_0 + Q_0(\theta))y, \\ \bar{\theta}_i &= \omega_i + \theta_i, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, d\}, \end{aligned}$$

donde $\|Q_0(\theta)\| \sim \varepsilon$.

Veamos una iteración del método:

Para tener convergencia cuadrática buscamos $x_1(\theta)$, B_1 y $C_1(\theta)$ de manera que las $y_1(\theta)$ y $Q_1(\theta)$, que podemos definir igual que antes, cumplan $\|y_1\| \sim \varepsilon^2$ y $\|Q_1(\theta)\| \sim \varepsilon^2$.

2.1 Paso para buscar $x_1(\theta)$:

En principio, $x_1(\theta)$ tiene que estar "cerca" de $x_0(\theta)$, por tanto podemos suponer que $x_1(\theta) = x_0(\theta) + h(\theta)$, con $h(\theta)$ "pequeña", de hecho $\|h(\theta)\| \sim \varepsilon$. Si desarrollamos por Taylor en un entorno de x_0 :

$$\bar{x}_1 - f(x_1, \theta) = \bar{x}_0 + \bar{h} - f(x_0, \theta) - D_x f(x_0, \theta)h + O(\varepsilon^2) = y_0 + \bar{h} - A_0(\theta)h + O(\varepsilon^2).$$

Como queremos que $\|y_1\| \sim \varepsilon^2$, $h(\theta)$ ha de verificar:

$$h(\theta + \omega) = A_0(\theta)h(\theta) - y_0(\theta). \tag{4}$$

Para resolver (4) se aplica el cambio $h(\theta) = C_0(\theta)u(\theta)$, de esta manera la ecuación (4) se convierte en:

$$u(\theta + \omega) = (B_0 + Q_0(\theta))u(\theta) - C_0^{-1}(\theta + \omega)y_0(\theta). \tag{5}$$

El término $Q_0(\theta)u(\theta)$ de la ecuación (5), es de orden ε^2, por tanto lo podemos despreciar y nos queda:

$$u(\theta + \omega) = B_0 u(\theta) - C_0^{-1}(\theta + \omega)y_0(\theta). \tag{6}$$

Una manera de solucionar esta ecuación es desarrollando todas las funciones de $\theta \in \mathbb{T}^d$ en serie de Fourier y igualando término a término.

Notemos: $g(\theta) = -C_0^{-1}(\theta + \omega)y_0(\theta)$, como $g(\theta)$ es una función conocida, conocemos su desarrollo en serie de Fourier:

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)).$$

Nuestra incógnita $u(\theta)$ también la desarrollamos:

$$u(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} (\alpha_k \cos(k\theta) + \beta_k \sin(k\theta)).$$

A la práctica usaremos truncaciones de las series. La elección del orden de la truncación, vendrá dada por el control del error en la solución. Este control del error se ha hecho análogo a [1] y [2]. En la implementación usamos fuertemente la equivalencia numérica entre una tabla de valores y los coeficientes de una serie de Fourier truncada. Así pues la resolución de (6) consiste en la resolución de los siguientes sistemas lineales:

$$
\begin{aligned}
(Id - B_0)\frac{\alpha_0}{2} &= \frac{a_0}{2}, \\
((\cos(k\omega)Id - B_0)^2 + \sin^2(k\omega)Id)\alpha_k &= (\cos(k\omega)Id - B_0)a_k + \sin(k\omega)b_k, \\
((\cos(k\omega)Id - B_0)^2 + \sin^2(k\omega)Id)\beta_k &= (\cos(k\omega)Id - B_0)b_k - \sin(k\omega)a_k.
\end{aligned}
$$

Observemos que se trata de $2N+1$ sistemas lineales independientes, de n incógnitas cada uno y n ecuaciones, donde n es la dimensión de las variables de estado y $N = \#\{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} : |k| = \sum_j |k_j| \leq K\}$ donde K controla la truncación de la serie. Teniendo en cuenta que a medida que crece la dimensión d del vector de frecuencias, se requiere un número más elevado de armónicos, esto supone un ahorro considerable de memoria, en comparación con otros métodos (vease [1,2]).

2.2 Paso para buscar $C_1(\theta)$:

Se trata de buscar un cambio $C_1(\theta)$, "próximo" al cambio inicial $C_0(\theta)$, o de otra forma, $C_1(\theta) = C_0(\theta)(Id + \delta C_0(\theta))$ con $\delta C_0(\theta)$ "pequeño". Como en el paso anterior hemos calculado $x_1(\theta)$, ahora conocemos $A_1(\theta) = D_x f(x_1(\theta), \theta)$. Consideremos el sistema lineal:

$$
\begin{aligned}
&\bar{x} = A_1(\theta)x, \\
&\bar{\theta}_i = \omega_i + \theta_i, \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, d\}.
\end{aligned}
$$

Nuestro objetivo es reducir este sistema a orden ε^2. Empecemos aplicando el cambio de variables que tenemos $x(\theta) = C_0(\theta)y(\theta)$. Si llamamos $\delta A_0(\theta) = A_1(\theta) - A_0(\theta)$, entonces resulta:

$$y(\theta + \omega) = C_0^{-1}(\theta + \omega)(A_0(\theta) + \delta A_0(\theta))C_0(\theta)y(\theta),$$

o lo que es equivalente:

$$y(\theta + \omega) = (B_0 + Q_0(\theta) + C_0^{-1}(\theta + \omega)\delta A_0(\theta)C_0(\theta))y(\theta). \tag{7}$$

Ahora llamamos $R(\theta)$ a todas las matrices no constantes que aparecen en la ecuación anterior, es decir: $R(\theta) = Q_0(\theta) + C_0^{-1}(\theta + \omega)\delta A_0(\theta)C_0(\theta)$ y definimos ls siguientes matrices:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= B_0 + \text{Promedio}(R(\theta)), \\
\tilde{R}(\theta) &= R(\theta) - \text{Promedio}(R(\theta)).
\end{aligned}
$$

Si sumamos y restamos Promedio$(R(\theta))$ en la ecuación (7) obtenemos:

$$y(\theta + \omega) = (B_1 + \tilde{R}(\theta))y(\theta). \tag{8}$$

Para resolver esta ecuación, consideramos el cambio $y(\theta) = (Id + \delta C_0(\theta))z(\theta)$ y se lo aplicamos a (8):

$$z(\theta + \omega) = (Id + \delta C_0)^{-1}(\theta + \omega)(B_1 + \tilde{R}(\theta))(Id + \delta C_0)(\theta)z(\theta).$$

Desarrollando $(Id + \delta C_0)^{-1}(\theta + \omega)$:

$$z(\theta + \omega) = (Id - \delta C_0^{-1}(\theta + \omega))(B_1 + \tilde{R}(\theta))(Id + \delta C_0(\theta))z(\theta) + O(\varepsilon^2).$$

Multiplicando y considerando los términos de orden menor que ε^2 nos da:

$$z(\theta+\omega) = (B_1 + \tilde{R}(\theta) + B_1\delta C(\theta) - \delta C(\theta+\omega)B_1)z(\theta) + O(\varepsilon^2).$$

Buscamos un cambio $\delta C(\theta)$ de manera que al hacer la succesión de transformaciones anteriores obtengamos:

$$z(\theta+\omega) = B_1 z(\theta) + O(\varepsilon^2).$$

Por tanto, para encontrar $\delta C(\theta)$, la ecuación que tenemos que resolver es:

$$\delta C(\theta+\omega)B_1 - B_1\delta C(\theta) = \tilde{R}(\theta). \tag{9}$$

Para hallar la solución de (9) procedemos análogamente al paso anterior. Desarrollamos en serie de Fourier tanto nuestras incógnitas como el término independiente. De esta manera si:

$$B = (B_{i,j})_{i,j}, \quad \tilde{R}(\theta) = (\tilde{R}_{i,j}(\theta))_{i,j}, \quad \delta C(\theta) = (C_{i,j}(\theta))_{i,j}, \quad \forall\, i,j \in \{1,\ldots,n\},$$

sus respectivos desarrollos serían:

$$\begin{aligned} C(\theta)_{i,j} &= \frac{\alpha_0^{i,j}}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} (\alpha_k^{i,j}\cos(k\omega) + \beta_k^{i,j}\sin(k\omega)), \\ \tilde{R}(\theta)_{i,j} &= \frac{a_0^{i,j}}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} (a_k^{i,j}\cos(k\omega) + b_k^{i,j}\sin(k\omega)), \end{aligned}$$

donde $a_k^{i,j}$, $b_k^{i,j}$ son conocidos y $\alpha_k^{i,j}$, $\beta_k^{i,j}$ son las incógnitas. En definitiva hemos de resolver:

$$\begin{aligned} \sum_m \{\alpha_k^{i,m}B_{m,j}\cos(k\omega) + \beta_k^{i,m}B_{m,j}\sin(k\omega) - B_{i,m}\alpha_k^{m,j}\} &= a_k^{i,j}, \\ \sum_m \{-\alpha_k^{i,m}B_{m,j}\sin(k\omega) + \beta_k^{i,m}B_{m,j}\cos(k\omega) - B_{i,m}\alpha_k^{m,j}\} &= b_k^{i,j}. \end{aligned}$$

Observemos que en este caso se trata de resolver N sistemas lineales independientes de $2n^2$ incógnitas y $2n^2$ ecuaciones, donde de nuevo n es la dimensión de la variable de estado y N es el número de armónicos que tomamos en la truncación.

La paralelización del método

El algoritmo tiene básicamente dos puntos paralelizables: la resolución de los sistemas lineales que aparecen y las múltiples evaluaciones de la aplicación f, en el caso de que su cálculo sea costoso. Queremos notar que estos son precisamente los puntos que requieren un mayor esfuerzo de cómputo.

La resolución de los sistemas lineales que aparecen:

Como hemos visto anteriormente, tanto para buscar la solución cuasi-periódica, como para buscar el cambio de coordenadas que reduce la matriz de la diferencial de la aplicación, usamos el desarrollo en serie de Fourier. En definitiva se trataba de igualar los coeficientes respectivos, y podíamos resolver la ecuación funcional, resolviendo una serie de sistemas lineales cuya dimensión no dependía del número de armónicos N que tomábamos al hacer la truncación de la serie. Concretamente eran $2N + 1$ sistemas lineales de n ecuaciones y n incógnitas en el caso de buscar la serie correspondiente a la solución cuasi-periódica y N sistemas de $2n^2$ ecuaciones y $2n^2$ incógnitas, en el caso de la serie que nos daba el cambio de coordenadas. Estos sistemas de ecuaciones son independientes entre ellos. Esto hace posible una sencilla implementación en paralelo.

Las evaluaciones de la aplicación:

Si el difeomorfismo que genera el sistema viene dado, por ejemplo, por la aplicación de Poincaré de una ecuación diferencial, gran parte del esfuerzo computacional será debido a las integraciones númericas. En cada paso m, el algoritmo requiere el resto $y_m(\theta) = \bar{x}_m - f(x_m, \theta)$, y la diferencial de la aplicación de Poincaré en la nueva aproximación de la solución que hemos encontrado $A_{m+1} = D_x f(x_m(\theta), \theta)$. Esto se traduce en integraciones numéricas, tanto del campo como de las variacionales del campo. Estas integraciones serán independientes, ya que se trata de integraciones variando la fase inicial, con lo que de nuevo es fácil su cálculo en paralelo.

Una aplicación

Para ilustrar esta exposición vamos a dar una aplicación dentro del campo de la mecánica celeste. Nos proponemos buscar soluciones cuasi-periódicas reducibles cerca del punto lagrangiano L_4 en un modelo que es una pertubación del problema restringido de tres cuerpos.

Partimos del problema restringido de tres cuerpos, con primarios el Sol y la Tierra. Consideramos una perturbación de este problema, que viene producida por el efecto del movimiento circular de dos planetas alrededor del centro de masas Tierra-Sol, de manera que estos dos planetas no afectan al movimiento de los primarios. Fijamos un sistema de coordenadas en el que la distancia entre los primarios está normalizada, el periodo entre éstos es 2π y tomamos unidades de manera que la masa total de la Tierra y el Sol es 1. Entonces las ecuaciones de este modelo, en un sistema giratorio con origen en el centro de masas del sistema Tierra-Sol, son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= p_x + y, \\
\dot{y} &= p_y - x, \\
\dot{z} &= p_z, \\
\dot{p}_x &= p_y - (1-\mu)\frac{x-\mu}{r_s^3} - \mu\frac{x-(\mu-1)}{r_t^3} - m_1\frac{x - a_1\cos(\theta_1)}{r_1^3} - \\
&\quad -m_2\frac{x - a_2\cos(\theta_2)}{r_2^3} + m_1\frac{\cos(\theta_1)}{a_1^2} + m_2\frac{\cos(\theta_2)}{a_2^2}, \qquad (10)\\
\dot{p}_y &= -p_x - (1-\mu)\frac{y}{r_s^3} - \mu\frac{y}{r_t^3} - m_1\frac{y - a_1\sin(\theta_1)}{r_1^3} - \\
&\quad -m_2\frac{y - a_2\sin(\theta_2)}{r_2^3} + m_1\frac{\sin(\theta_1)}{a_1^2} + m_2\frac{\sin(\theta_2)}{a_2^2},
\end{aligned}
$$

$$\dot{p}_z = -(1-\mu)\frac{z}{r_s^3} - \mu\frac{z}{r_t^3} - m_1\frac{z}{r_1^3} - m_2\frac{z}{r_2^3},$$

donde $\theta_1 = \omega_1 t$, $\theta_2 = \omega_2 t + \theta$, μ es la masa de la Tierra, m_1, m_2 son las masas de los dos planetas que consideramos, a_1, a_2 los semiejes mayores de sus órbitas respectivas y ω_1, ω_2 sus frecuencias. Notamos θ el ángulo de desfase entre los dos planetas y:

$$\begin{aligned}
r_s^2 &= (x-\mu)^2 + y^2 + z^2,\\
r_t^2 &= (x-(\mu-1))^2 + y^2 + z^2,\\
r_1^2 &= (x - a_1\cos(\theta_1))^2 + (y - a_1\sin(\theta_1))^2 + z^2,\\
r_2^2 &= (x - a_2\cos(\theta_2))^2 + (y - a_2\sin(\theta_2))^2 + z^2.
\end{aligned}$$

Observemos que si $m_1 = m_2 = 0$ tenemos las ecuaciones del problema restringido de tres cuerpos.

En lo succesivo denotemos $u = (x, y, z, p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^6$. Para aplicar esta metodología, usaremos la sección de Poincaré $\theta_1 = 0$. La aplicación correspondiente dependerá de un solo ángulo θ_2. Notemos $\phi_{\theta_2}(t, u)$ el flujo de (10) con $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 \in \mathbb{T}^1$. Definimos $f(u, \theta_2)$ la aplicación que va de $\phi_{\theta_2}(0)$ a $\phi_{\theta_2}(2\pi/\omega_1)$, y observemos que θ_1 cae de nuevo en la sección de Poincaré. Entonces la dinámica de (10) se puede describir también mediante:

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= f(u, \theta_2),\\
\bar{\theta}_2 &= \theta_2 + \omega,
\end{aligned} \tag{11}$$

donde $\theta_2 \in \mathbb{T}^1$ y $\omega = 2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}$.

La diferencial de (11) se obtiene integrando las ecuaciones variacionales de (10). Así, si $u_0(\theta_2)$ denota la solución cuasi-periódica de (11), entonces la dinámica lineal la podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= A(\theta_2)u,\\
\bar{\theta}_2 &= \theta_2 + \omega,
\end{aligned} \tag{12}$$

donde $\omega = 2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}$ y $A(\theta_2) = D_u f(u_0(\theta_2), \theta_2)$.

Para aplicar el algortimo, necesitamos una aproximación inicial. Como el modelo (10) es una perturbación del problema restringido y queremos calcular soluciones en un entorno de L_4, tomamos como $u_0(\theta) \equiv L_4$, es decir la curva constante al punto L_4. Como matriz reducida B_0, las variacionales del problema restringido evaluadas en L_4 dentro de la sección de Poincaré que estamos trabajando, es decir evaluar la matriz fundamental de las variacionales del problema restringido en $t = 2\pi/\omega_1$. Por tanto el cambio inicial $C_0(\theta)$ será constante a la identidad. Una vez tenemos todos los ingredientes, podemos aplicar el esquema iterativo. En la Figura 1 mostramos las proyecciones en las componentes x y y de dos soluciones cuasi-periódicas de (10), tomando como perturbación los planetas Saturno y Júpiter en un caso y Venus y Júpiter en el otro. En los dos casos m_2 y ω_2 se refieren a Júpiter. Los valores propios de la matriz reducida de (12), en estos dos casos, son conjugados dos a dos y de módulo 1, lo que implica que la órbita cuasi-periódica es linealmente estable. En el Cuadro 1 damos el argumento positivo de los valores propios de las matrices reducidas para los dos sistemas (12) respectivos.

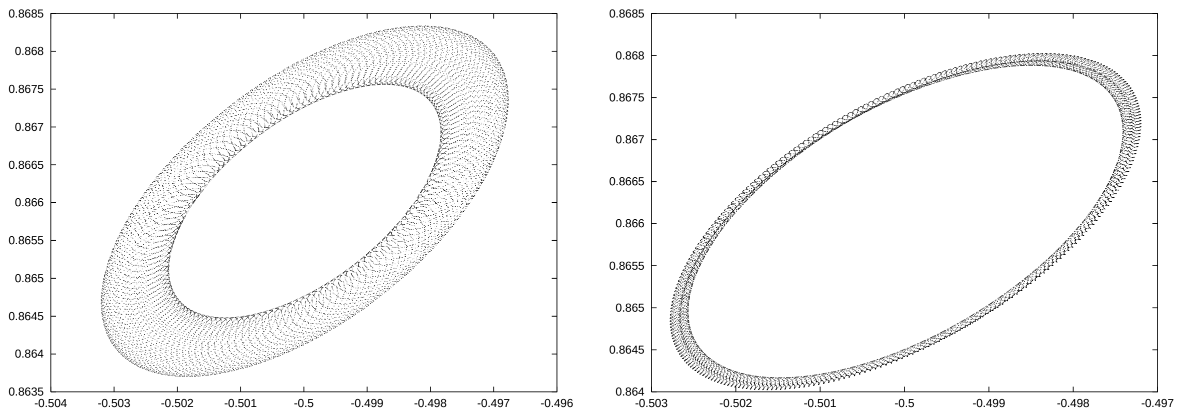

Figura 1: *Proyecciones* (x, y) *de las soluciones cuasi-periódicas considerando la perturbación correspondientes a Júpiter y Saturno en el dibujo de la izquierda y Júpiter y Venus en el de la derecha.*

2.9465422596978760e-02	4.5505652467940756e-02
2.2077010842674819e-01	6.1971351268124319e-01
2.2091117967580665e-01	6.2000560396229509e-01

Cuadro 1: *Frecuencias normales de las soluciones cuasi-periódicas correspondientes a Júpiter y Saturno en la columna de la izquierda y Júpiter y Venus en la de la derecha.*

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por las ayudas BFM2000–0623 (MCyT), 2001SGR–70 (CIRIT), el DURSI y una beca predoctoral FI/FIAP de la Generalitat de Catalunya.

Referencias

[1] E. Castellà, À. Jorba, "On the Vertical Families of two-dimensional Tori near the triangular points of the bicircular problems." *Jour. Cel. Mech. Dyn. Astr.*, **76**, (2000), 35-54.

[2] À. Jorba, "Numerical computation of the normal behaviour of invariant curves of n-dimensional maps" *Nonlinearity.*, **14**,(2001), 943–976.

[3] À. Jorba, C. Simó, "On Quasi-periodic Perturbations of Elliptic Equilibrium Points" *SIAM J. Math. Anal.*, **27**, 6, (1996), 1704–1737.

1 Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. Universitat de Barcelona.
Gran Via 585, 08007 Barcelona.