Com entendre el comportament no predictible dels sistemes deterministes [1]

Carles Simó

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona

Algunes consideracions elementals

Des de fa molts segles la humanitat s'ha preocupat dels fenòmens que apareixen als seus sentits. Es tracta, en primer lloc, de comprendre'ls. Una fase posterior és la de predicció. Encara més, es tracta de preveure què succeirà si s'actua sobre els fenòmens d'una determinada manera. Considero que les tres fases d'aproximació i d'interacció de l'home amb la natura són: comprensió, predicció i control. Per a les tres ens cal disposar d'un model o, si es vol, d'unes *lleis de la natura*. Per a aquesta tasca la manera de treballar ha de ser la cooperació d'experts en els diferents camps de coneixement (física, química, biologia, economia, etc.) amb matemàtics.

En principi, la matemàtica fa abstracció del món real, essent així una ciència fàcil. Una *llei de la natura* és sempre una aproximació. Això no vol dir que les dites lleis no siguin útils, però en tot cas hem de ser conscients de les seves limitacions i no fer extrapolacions sense fonament experimental.

El primer que cal fer per comprendre un fenomen és observar-lo i recollir-ne la màxima quantitat possible d'informació. Aquesta s'ha de quantificar: cal prendre mesures de magnituds rellevants en el fenomen. Això porta a dos problemes: com mesurar i deixar clar quines són les magnituds rellevants. Mesurar vol dir interaccionar amb el fenomen mitjançant cert instrument. Possiblement la indicació de l'instrument és afectada per un cert error i la mateixa mesura modifica el fenomen. Per mesurar cal que puguem aïllar el fenomen d'altres fenòmens paràsits que donarien informació més difícil d'analitzar. Això vol dir que hem de recòrrer a l'experimentació. Si és possible cal poder reproduir el fenomen en un laboratori on, hom ho espera, la presa de mesures serà més fàcil. Una característica de l'experimentació és la seva repetitivitat. Un experiment correctament descrit s'ha de poder reproduir. Si no és així, no se'n poden treure conclusions o bé

[1]Article aparegut a *Ordre i caos en ecologia*, coordinat per Jordi Flos, pp 19–54, Publicacions de la Universitat de Barcelona, 1995, ISBN: B: 84-475-1104-9

les que se'n dedueixin (la *llei*) no seran correctes. Vegeu, però, els comentaris sobre experimentació i repetitivitat en la secció on es parla d'impredictibilitat.

Això lliga amb un altre problema ja esmentat: quines són les magnituds rellevants. Resoldre aquest problema és previ a la modelització adequada (la determinació de la *llei*). Saber triar les bones variables a mesurar forma part de *l'ofici* de l'estudiós de la matèria tractada. La intuïció representa aquí un bon paper, que caldrà confirmar amb l'anàlisi del model, les prediccions i la recollida de noves dades experimentals. És clar que observació, modelització, anàlisi i predicció no van aïllades. La comprensió és un procés interactiu entre les seves diverses fases.

Cal dir que hi ha àrees on observació i experimentació són particularment difícils, la qual cosa farà que no se'n pugui deduir un model matemàtic o que aquest sigui molt groller. Tal és el cas, per exemple, en moltes branques de la biologia, medicina, economia, ciències socials, etc. També pot ser que les dades obtingudes no siguin compatibles amb un model deterministe o, en tot cas, que aquest hagi de ser extraordinàriament complicat. El treball en aquestes disciplines és, comparativament, més difícil que en la física o en la química, per exemple. Els seus estudiosos n'han de ser ben conscients i, per tant, s'han de deslliurar de tot dogmatisme.

En aquest cas, hom recorre sovint a emprar tests estadístics. Aquests poden donar informació valuosa, però no poden esbrinar les lleis que regeixen el fenomen. Un nou fàrmac, per exemple, pot ser provat en un cert conjunt d'individus i validar la seva eficàcia i fiabilitat. Però la comprensió de com produeix el seu efecte exigeix curosos experiments bioquímics per conèixer realment com actua. Les tècniques estadístiques certament poden donar informació sobre l'existència de relació entre certes variables. Podem dir que són les que cal usar primer quan hom no coneix res del fenomen. En tot cas, cal insistir en el fet de disposar de sèries temporals de dades. La variable temps porta una informació essencial sobre la dinàmica i si no es disposa d'ella es perd una part molt important de les dades necessàries per a la comprensió.

Un cop realitzats diversos experiments i amb una idea de les variables rellevants, arribem a la fase d'escriure les equacions matemàtiques que puguin descriure el fenomen observat. Algunes vegades aquestes es dedueixen d'una manera del tot lògica de *lleis* més generals i que són prou correctes, com en problemes de mecànica, òptica, cinètica química, etc.

Per centrar idees suposarem que estudiem l'evolució temporal o espacial d'una magnitud o diverses magnituds simultàniament. Aquestes poden ser la posició i velocitat d'una partícula, la concentració d'una substància química en un recipient, el valor de la temperatura en una paret, el nombre d'individus de diverses espècies animals en una àrea donada, la quantitat d'eritròcits per centímetre cúbic, la intensitat de radiació electromagnètica, etc. L'estat del sistema (o fenomen) estudiat és descrit per nombres que ens indiquen la quantia de les diverses magnituds. Aquests nombres es poden prendre com les *coordenades del sistema*, de manera que aquest quedarà determinat si els coneixem en un cert moment (i, potser, en un cert punt o conjunt de punts). Admetem, a partir d'ara, que el fenomen estudiat és *determinista* si no hom diu explícitament el contrari.

L'evolució del sistema a partir d'unes condicions inicials s'expressa dient com variarà al llarg del temps i/o l'espai. Per exemple, una població biològica té variacions, en un cert interval de temps, a causa de les morts produïdes (siguin causades per malaltia, per manca d'aliments, per l'acció de depredadors o per lluites internes), dels naixements, i, si ens fixem en un cert indret, també de les migracions. Si tenim en compte les diverses contribucions a la variació de la població, obtenim una relació que ens dóna la població en una època a partir del seu valor en una època anterior (per exemple, un mes, un dia o un any abans), dels valors d'altres poblacions i d'altres variables que depenen del temps (com és la meteorologia, que influirà en la disponibilitat d'aliment). Naturalment, pot ser adequat considerar la població esmentada no globalment sinó la seva repartició en edats, si aquesta varia considerablement al llarg del temps. Resumint, l'estat del sistema en un moment depèn del seu estat en una època anterior.

La formulació matemàtica es fa dient que el pas d'una època a una de posterior és una funció que depèn de l'estat inicial. Iterant el procés obtenim l'evolució del sistema en el temps. Aquest tipus d'estudi s'engloba dins de l'anomenada *teoria de la iteració*.

Continuant amb el cas d'una població i per ser més realistes, com ja hem esmentat, pensem que en la seva expressió en una època donada no sols intervé la població en una època anterior (per exemple, un mes abans) sinó en diverses èpoques anteriors. En efecte, cal tenir compte que no tota la població està en condicions de reproduir-se i, per tant, caldrà eliminar els individus massa joves o massa vells. Obtenim així un model de població amb memòria (de les poblacions en èpoques passades), o, si es vol, podem trencar la població en diverses subpoblacions segons sexe, edat, etc. A mesura que passen els intervals de temps, els individus d'una subpoblació, si no han mort i no han migrat, passen a la subpoblació d'edat superior. Els individus en edat fèrtil donen lloc a naixements d'acord amb una certa taxa de reproducció, i els nounats, que estan en el primer nivell de subpoblació, pateixen fortament l'acció de depredadors o la climatologia adversa. Es pot descriure l'evolució de la població com el que s'anomena una equació en diferències finites o, més generalment, un sistema d'equacions en diferències finites.

Si passem al límit quan l'interval de temps entre una època i la següent tendeix a zero, tindrem una equació diferencial ordinària, on la variable independent és el temps i la variable dependent és la mida de la població (o les mides de les diverses subpoblacions, si s'escau). Si, al mateix temps, considerem el comportament respecte a l'espai a causa d'un procés de migració (que hom pot considerar com una difusió cap a territoris més atractius per un motiu o altre) tindrem una equació en derivades parcials, ja que cal considerar, no sols la derivada de la població respecte el temps, sinó també les derivades respecte a les variables d'espai. El fet que hi hagi processos no instantanis (per exemple la maduració dels individus o la transmissió d'informació) porta a equacions amb retard o a d'altres models més complicats.

Resumint, la majoria dels models d'evolució de l'estat d'un sistema donat s'escriuen com a equacions diferencials o equacions en diferències finites, en el cas que, realment existeixin unes *lleis de la natura* deterministes que regeixin aquests fenòmens. No parlarem de models en els quals intervingui una certa component aleatòria. És a dir, models en el quals intervinguin variables de les quals no es conegui prou bé l'efecte, models massa complicats per descriure'ls d'una manera determinista, o bé fenòmens tals que la *llei física que els regeix* tingui caràcter probabilista. Aquests models són realment importants, però ens centrarem en els deterministes.

En aquestes notes usarem el *llenguatge dels sistemes dinàmics* per presentar una *explicació geomètrica* d'una característica que fins fa uns 30 anys era insospitada en els sistemes deterministes. Es tracta de la *manca de predictibilitat*. Sembla que, essent un sistema determinista i coneixent l'estat en un cert moment, els estats en tot temps posterior queden ja ben definits. Realment això seria cert si coneguéssim l'estat inicial del sistema i totes les constants (físiques, químiques, biològiques, etc.) que apareixen en ell amb *precisió infinita*. Això no és possible, i es presenta sovint l'anomenada *dependència sensible a les condicions inicials*, que origina la impredictibilitat. És cert que matemàtics com Poincaré, Birkhoff, Cartwright, Littlewood, etc. sabien l'existència d'aquesta característica, però no s'ha popularitzat fins que la simulació de models matemàtics emprant ordinadors ha permès de fer nombrosos *experiments* numèrics ràpidament. Aquesta característica s'ha difòs amplament sota el nom de *caos determinista*. No usaré més aquest mot, ja que sovint s'usa com a excusa per encobrir un desconeixement. El nostre objectiu serà, doncs, entendre el *comportament no predictible de sistemes deterministes*. Veurem com es crea i com es destrueix, i el perquè apareix sistemàticament en sistemes depenent de paràmetres per a valors adequats d'aquests.

En tot el que segueix presentem el llenguatge bàsic dels sistemes dinàmics. Com el que volem és entendre la dinàmica (és a dir, de quines maneres pot evolucionar el sistema en funció de les condicions inicials), ens cal primer *l'esquelet* sobre el qual s'organitza tota la dinàmica. Aquest està format per *objectes invariants*, és a dir, conjunts de punts dins de l'espai de possibles estats del sistema que romanen invariants (com a conjunts, ja que en general la dinàmica fa moure els punts d'aquests conjunts) per l'acció del sistema dinàmic. Una característica bàsica d'alguns objectes invariants és la seva *hiperbolicitat*. Grollerament podem dir que són inestables: ens aproximem a ells en certa direcció i ens n'allunyem en una altra. Les no linealitats poden causar que retornem una i altra vegada prop d'un objecte hiperbòlic. Això dóna lloc als anomenats *fenòmens homoclínics* que, com veurem, són els que originen la *impredictibilitat* i donen lloc als anomenats *atractors estranys*. Variacions dels paràmetres que intervinguin en el model, poden provocar *bifurcacions*, és a dir, canvis en el comportament qualitatiu (i per tant, quantitatiu). Aquestes poden ser de tipus *local* o *global*. Un cas fonamental de les bifurcacions globals són les anomenades *tangències homoclíniques*, que estan estretament relacionades amb la creació i destrucció de dinàmica no predictible. Finalment, abordem el tema dels *models universals*. Sota condicions adequades, sistemes dinàmics arbitraris poden ésser *modelitzats* (a la seva vegada) per sistemes molt més senzills i fàcils d'analitzar. Al final es presenten maneres de reconèixer el caràcter determinista d'un fenomen i referències sobre diversos exemples i sobre les tècniques a emprar per obtenir efectivament els elements bàsics de l'esquelet del sistema.

Abans d'entrar pròpiament en matèria vull deixar clar que tot el que segueix s'aplica a problemes reals on:

1. És prou correcte admetre que el sistema és determinista.

2. Hom té equacions que descriuen el comportament del fenomen.

3. Per comparació amb experiments (*físics* i no numèrics, és clar) de l'anàlisi del model matemàtic, es considera que les *prediccions* deduïdes del model són prou acurades per poder-lo considerar útil. *No hi ha models correctes, sinó, com a molt, models útils*.

Per tant, hom no pot pretendre fer cap extrapolació de les idees que s'exposin a models *no validats*. Un cas especialment delicat apareix quan hom pretén aplicar conclusions obtingudes a partir de l'anàlisi del comportament conjunt d'un sistema amb molts elements (sigui un sistema de partícules, una població d'individus, etc.). Si el sistema que es vol estudiar té pocs elements (per exemple, si en el cas de l'ecologia les poblacions que hom considera són *petites*), llavors no té cap sentit parlar d'una *dinàmica en mitjana* i el problema és molt més difícil. És ben conegut que és molt més complicat estudiar, diguem, el problema de 4 cossos sota l'atracció newtoniana, que un problema amb 10^{24} partícules, que probablement estigui molt ben descrit, en conjunt, per les lleis de la mecànica estadística.

Preliminars sobre equacions diferencials

Suposem que el problema a estudiar està caracteritzat per n variables, $v_1, v_2, ..., v_n$, o, de forma abreujada, v. Per descriure l'evolució de v respecte el temps tindrem una relació del tipus

$$\dot{v} = f(t, v), \tag{1}$$

on $\dot{v}$ denota la derivada de v respecte del temps t, o, si es vol, la velocitat amb què es mou v com a funció d'aquesta v i el temps. L'equació (1) és, en aquest cas, la *llei de la natura* que suposem que ens descriu el comportament del fenomen. Una equació com (1) s'anomena una *equació diferencial ordinària*. Si per a un temps donat, $t^{(0)}$, coneixem el valor de les variables v, $v^{(0)}$, llavors el valor de v com a funció del temps queda determinat mentre (1) tingui sentit. Més concretament, recordem el

Teorema. *(Picard) Considerem el problema de valors inicials següent: determinar una funció $\varphi(t; t^{(0)}, v^{(0)})$ solució de (1) (és a dir tal que $\frac{d}{dt}\varphi(t; t^{(0)}, v^{(0)}) = f(t, \varphi(t; t^{(0)}, v^{(0)}))$ es compleix per a tot t dins d'un cert interval) i complint les condicions inicials donades: $\varphi(t^{(0)}; t^{(0)}, v^{(0)}) = v^{(0)}$. Llavors si f és una funció contínua, afitada i és lipschitziana respecte v, existeix una tal funció φ i és única.*

Una funció, $f(t, v)$, es diu *lipschitziana* (o que satisfà una condició de Lipschitz) respecte v si $|f(t, v) - f(t, w)| \leq L|v - w|$, per a tot v i w en el domini de la funció, on $|\cdot|$ és una norma a $\mathbb{R}^n$ i L una constant (l'anomenada constant de Lipschitz de g). De fet, pel teorema de Picard, sols cal que sigui localment lipschitziana, és a dir, que cada punt, v, tingui un entorn en el qual és lipschitziana.

Una equació com (1) depèn explícitament del temps. Quan no ho fa ($\dot{v} = f(v)$) l'equació és autònoma. Sempre podem reduir una equació a autònoma afegint una variable addicional. En efecte, considerem w amb $n + 1$ components $(w_0, w_1, ..., w_n)$ i agafem $w_0 = t, w_j = v_j$, si $j > 0$. Llavors es té

$$\begin{aligned} \dot{w}_0 &= 1, \\ \dot{w}_j &= f_j(w_0, w_1, ..., w_n), \;\; j = 1, ..., n, \end{aligned}$$

on f_j és la component j del vector f, és a dir, tenim

$$\dot{w} = g(w), \tag{2}$$

que és autònoma. Per a una equació autònoma el valor inicial de t, $t^{(0)}$, és irrellevant i es pot prendre 0. Llavors la solució es posa simplement $\varphi(t; x^{(0)})$ o $\varphi_t(x^{(0)})$ i s'anomena flux. Si les solucions estan definides, es compleix $\varphi_t(\varphi_s(x^{(0)})) = \varphi_{t+s}(x^{(0)})$, o simplement $\varphi_t \varphi_s = \varphi_{t+s}$.

Vegem com depèn la solució de (2) respecte de les condicions inicials. Si les solucions que per $t = 0$ s'inicien a $x^{(0)}$ i $y^{(0)}$ estan definides per a un t donat, es té

$$|\varphi(t, x^{(0)}) - \varphi(t, y^{(0)})| \leq e^{L|t-t_0|}|x^{(0)} - y^{(0)}|, \tag{3}$$

desigualtat que s'obté de l'anomenat *Lema de Gronwall*. En certs casos l'acotació donada per (3) és molt pessimista. Voldríem quelcom de millor i, a més, conèixer el comportament del flux, $\varphi_t(x^{(0)})$ respecte a $x^{(0)}$ quan a (2) la g és diferenciable r vegades i $D^r g$ és contínua (és a dir $g \in \mathcal{C}^r$). Es té el resultat:

Teorema. *Si g és $\mathcal{C}^r$ llavors φ_t és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^r$ (és a dir, φ_t és una aplicació biunívoca i tant φ_t com φ_t^{-1} són de classe $\mathcal{C}^r$). A més, la diferencial primera, $D_x\varphi_t(x)$, satisfà l'equació*

$$\frac{d}{dt}(D_x\varphi_t(x)) = Dg(\varphi_t(x))D_x\varphi_t(x) \tag{4}$$

amb la condició inicial $D_x\varphi_t(x)|_{t=0} = Id$, on Id vol dir la matriu identitat a $\mathbb{R}^n$.

L'equació (4) s'anomena equació de la primera variació o primera equació variacional. Llavors es té

$$\varphi_t(y) - \varphi_t(x) = D_x\varphi_t(x)(y-x) + o(|y-x|),$$

que, sovint, dóna acotacions molt millors que (3) per a $|y-x|$ petit. Notem que l'equació (4) és lineal amb coeficients que depenen del temps.

Sistemes continus i discrets

Si φ_t existeix per a tot t real, llavors la propietat $\varphi_t\varphi_s = \varphi_{t+s}$ ens diu que, si g és almenys $\mathcal{C}^1$, el conjunt d'aplicacions $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$ és un grup uniparamètric de difeomorfismes. Això suggereix la definició següent:
Un *sistema dinàmic* és una parella (M, φ_t) on M és una varietat (per exemple una superfície, un obert de $\mathbb{R}^n$, etc.) i $\{\varphi_t\}$ és un grup uniparamètric de difeomorfismes actuant a M i complint $\varphi_t\varphi_s = \varphi_{t\circ s}$, on $t \circ s$ vol dir l'operació en el grup. Si, a més, μ és una mesura a M i φ_t preserva μ (és a dir $\mu(\varphi_t A) = \mu(A)$ per a tot conjunt $A \in M$ mesurable), llavors la terna (M, μ, φ_t) es diu que és un *sistema dinàmic preservant una mesura*.

Sovint els grups uniparamètrics són $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$. En el primer cas es parla d'un *sistema dinàmic continu* i podem associar-li una equació diferencial com (2) definint $g(x) = \frac{d}{dt}\varphi_t(x)|_{t=0}$. Si el grup és $\mathbb{Z}$ hom parla d'un *sistema discret* i sols cal conèixer φ_1, ja que per la propietat de grup tenim $\varphi_n = \varphi_1^n$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$. Anomenem φ_1 el generador.

Naturalment, també podem definir sistemes dinàmics (continus o discrets) on φ_t és simplement un grup d'homeomorfismes, sense cap condició de diferenciabilitat. Si (M, μ) és una parella formada per un espai abstracte, M, i una mesura en ell, μ, podem definir també un sistema dinàmic (abstracte) (M, μ, φ_t), on ara φ_t són transformacions 1 a 1 llevat de conjunts de mesura zero i preservant μ: $\varphi_t^{-1}(A)$ i A tenen la mateixa mesura per a tot A mesurable.

Si les transformacions φ_t no tenen inversa llavors parlem de *semisistemes dinàmics* (continus o discrets). En el cas que el grup sigui $\mathbb{R}_+$ (és a dir, els reals no negatius), tindrem encara $\varphi_t\varphi_s = \varphi_{t+s}$ si $t, s \geq 0$, però, en general, no existeix $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$ per a $t > 0$. En tot el que segueix ens interessem, bàsicament, en el cas de sistemes i no de semisistemes.

És relativament senzill passar d'un sistema continu a un de discret. Sigui T un temps fixat. Llavors definim com a generador, ϕ_1, del grup discret, l'aplicació $\varphi_{t=T}$ del sistema continu. Si partim d'una equació com (1) i f és $T-$periòdica respecte t ($f(t+T,x) = f(t,x)$ per a tot $t \in \mathbb{R}$ i tot x on estigui definida), llavors no cal augmentar primer la dimensió de l'espai de n a $n+1$, tal com hem dit abans per transformar una equació com (1) a la forma (2). En efecte, si pugem a dimensió $n+1$, el flux φ_T produeix valors de t que coincideixen mòdul el període. Així doncs, no cal donar la component *temporal* de les variables w. És cert que, en aquest cas, φ_T depèn del valor inicial del temps, $t^{(0)}$, però les transformacions que es tenen per a temps inicials diferents, per exemple $t^{(0)}$ i $t^{(1)}$, són conjugades usant la relació $\varphi(t^{(0)}+T;t^{(0)},\cdot)\,\varphi(t^{(0)};t^{(1)},\cdot) = \varphi(t^{(0)}+T;t^{(1)}+T,\cdot)\,\varphi(t^{(1)}+T;t^{(1)},\cdot)$, ja que, per la periodicitat que hem suposat es té, $\varphi(t^{(0)}+T;t^{(1)}+T,\cdot) = \varphi(t^{(0)};t^{(1)},\cdot)$.

Un altre procediment per definir un sistema discret a partir d'un de continu és l'anomenada *aplicació de Poincaré* (o aplicació de *retorn*) quan l'equació diferencial inicial és autònoma. Sigui $\mathcal{S}$ una hipersuperfície a M (és a dir, de dimensió una menys que la de M) transversal al flux. Això vol dir que per a tot punt $p \in \mathcal{S}$ el camp vectorial, $g(p)$, no està contingut en el pla tangent a $\mathcal{S}$ en el punt p. Suposem que hi ha un temps, $\tau(p) > 0$, tal que $\varphi_{\tau(p)} \in \mathcal{S}$. Llavors, pel teorema de la funció implícita, hom té que hi ha una aplicació definida a un entorn V de p a $\mathcal{S}$, $P: V \to P(V)$ mitjançant $P(q) = \varphi_{\tau(q)}(q), \forall q \in V$. Naturalment, pot ser que $P(q) \notin V$ i llavors la nova imatge $P(P(q))$ no estarà definida. Això pot succeir ja que, en general, les seccions de Poincaré, $\mathcal{S}$, no són *globals*. D'altra banda, si considerem $t < 0$ no hi ha cap garantia que, per a un $r \in V$ qualsevol, el conjunt $\{\varphi_t(r), t < 0\}$ tingui cap punt a $\mathcal{S}$. Si succeix que, per a un q en un entorn potser més petit que V, V_0, tenim $P^j(q)$ definit per a tot $j \in \mathbb{Z}$, haurem obtingut un sistema discret, de generador P, a partir del continu $\{\varphi_t\}$. Notem que en aquest cas la dimensió de l'espai on viuen les variables (o *espai de fases*) s'ha reduït en una unitat. És clar que si l'equació diferencial inicial, $\dot{x} = g(x)$, té diverses *integrals primeres* $F_1, F_2, ..., F_k$ independents (és a dir, funcions tals que $(\nabla F_j(x), g(x)) = 0$ i els gradients són linealment independents) podem reduir més la dimensió. Si $p \in \mathcal{S}$ i $F_j(p) = c_j$ llavors l'aplicació P es pot restringir a $V_0 \cap F_1^{-1}(c_1) \cap ... \cap F_k^{-1}(c_k)$, rebaixant la dimensió en k unitats addicionals. Aquest és el cas dels sistemes hamiltonians, que tenen el propi hamiltonià, H, com a integral primera.

Recíprocament, donat un sistema discret de generador ϕ és possible definir un sistema continu que té a ϕ per aplicació de Poincaré o per aplicació $\varphi_{t=1}$. El procediment s'anomena *suspensió*, però cal augmentar la dimensió de l'espai de fases en una unitat o introduir una equació diferencial no autònoma (però 1-periòdica respecte el temps). A més la nova varietat en que viu el flux pot ser molt complicada. En general es poden obtenir, de forma explícita i simple, camps 1-periòdics diferenciables (fins i tot infinitament diferenciables), però no és fàcil tenir-los analítics. No usarem aquesta tècnica en tot el que segueix, encara que és extraordinàriament útil per a nombroses demostracions.

Objectes invariants. Hiperbolicitat

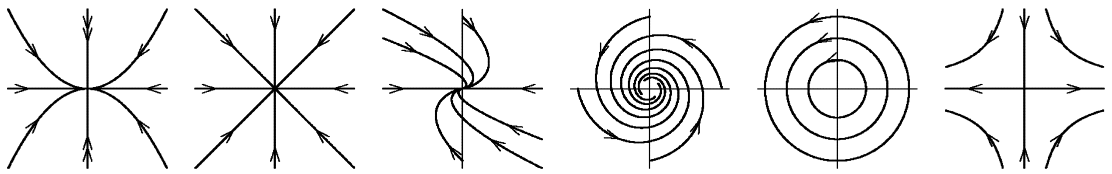
Usarem indistintament fluxos o difeomorfismes. Per simplificar l'exposició suposarem que treballem a un obert de $\mathbb{R}^n$ o a tot $\mathbb{R}^n$ (ja hi ha prou dificultats!). Primer cerquem solucions *senzilles* de l'equació autònoma (2). Les més simples són els punts fixos. Un punt, w^*, s'anomena *punt fix* de (2) si $g(w^*) = 0$, i per tant $\varphi_t(w^*) = w^*\ \forall t \in \mathbb{R}$. L'estudi del comportament prop d'un punt fix es fa estudiant l'equació (4), que ara té coeficients constants:

$$\frac{d}{dt}(D_x\varphi_t(x)) = Dg(w^*)D_x\varphi_t(x) \tag{5}$$

És clar que, com que això és una aproximació lineal, caldrà tenir compte dels termes d'ordre superior. De tota manera, com veurem, hi ha casos en què la informació que dóna la part lineal és suficient per descriure el comportament prop de w^*. L'estudi de (5) es fa posant $Dg(w^*)$ en forma canònica (de Jordan, per exemple). La figura 1 mostra el comportament de sistemes lineals amb coeficients constants en el pla prop del punt fix (que ara és l'origen si considerem equacions de la forma $\dot{y} = Ay$, amb A matriu constant). De moment no admetem valors propis nuls.

Juntament amb cada cas hem posat el tipus de matriu. A més dels *a), b), c), d)* podem considerar els que s'obtenen canviant la matriu de signe. Sols cal canviar el sentit de recorregut de les òrbites. Notem també que en els casos *d)* i *e)* un canvi de signe fa girar en el sentit de les busques d'un rellotge en lloc del sentit contrari.

Els tres primers casos s'anomenen nodes estables o atractors (inestables o repulsors si es canvia el signe del camp g). El cas *d)* és un focus i el *e)* un centre. Finalment el cas *f)* és una sella. Notem que el cas *e)* és estable (i també ho és si es canvia el signe). El cas *f)* és inestable. El cas *c)* és un node degenerat.



$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	$\lambda_1 < 0$	$\lambda_1 < 0$	$\alpha < 0, \beta > 0$	$\beta > 0$	$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$
a)	b)	c)	d)	e)	f)

Figura 1

La diferència entre *a)* i *b)* és que en el cas *b)* les òrbites entren a l'origen en totes les direccions, però en el *a)* n'hi ha una que entra en la direcció associada a λ_2 (el valor propi més negatiu), o direcció *fortament* estable, i totes les altres entren tangents a la direcció del vector propi associat a λ_1 (direcció *feblement* estable). Llevat de les òrbites que estan en la direcció del vector propi, les altres tenen un ordre de contacte amb aquesta direcció igual a $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, en general no enter.

És clar que en un cas com *e)* petites modificacions (no lineals) de l'equació diferencial poden fer que les solucions *espiralin* cap endins o cap a fora. Però els altres casos es comporten essencialment de la mateixa manera que en el cas lineal si afegim termes no lineals. Això queda assegurat pel teorema de Hartman. Primer ens cal una definició.

Direm que una matriu és *hiperbòlica* (en el context de les equacions diferencials) si tots els seus valors propis tenen part real diferent de zero. Els casos *d)* i *e)* de la figura 1 tenen valors propis $\alpha \pm i\beta$ i $\pm i\beta$, respectivament. Així sols queda exclòs el cas *e)*. Un *punt fix*, w^*, de (2) es diu *hiperbòlic* si $Dg(w^*)$ és hiperbòlica (és clar, suposem $g \in \mathcal{C}^1$).

Teorema. *(Hartman) Sigui w^* un punt fix hiperbòlic d'una equació diferencial $\dot{w} = g(w)$. Siguin φ_t i ψ_t els fluxos associats a $\dot{w} = g(w)$ i $\dot{w} = Dg(w^*)w$, respectivament. Llavors hi* *ha un entorn, U, de w^* i un homeomorfisme, h, definit a U, amb $h(w^*) = w^*$ que conjuga φ_t i ψ_t (és a dir $h\varphi_t = \psi_t h$ per a tot t mentre els punts estiguin en l'entorn corresponent).*

En altres paraules, llevat de la transformació h (que podem mirar com un canvi de variables) els fluxos φ_t i ψ_t són el mateix a un entorn de w^*. Notem, però, que h no és, en general, una transformació diferenciable.

De fet, els casos *a)* a *d)* són conjugats per un homeomorfisme. Sols el nombre de valors propis amb part real positiva (o negativa) és suficient per decidir si 2 sistemes amb matrius hiperbòliques (de la mateixa dimensió, és clar) són conjugats.

En el cas de valors propis nuls (un o els dos en el cas de 2 variables) es donen situacions més degenerades. Llavors la contribució de la part no lineal és essencial per descriure el comportament prop del punt fix. La figura 2 mostra algunes de les possibles configuracions.

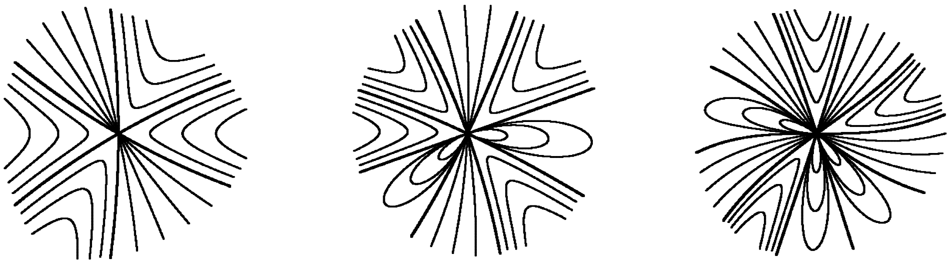


Figura 2

A la figura 1 cas *f)*, que correspon a un problema pla i lineal, veiem que hi ha 2 rectes invariants (els eixos horizontal i vertical) caracteritzades per $\{x \in U| \lim_{t\to\infty} \psi_t(x) = w^*\}$ en el cas de l'eix vertical i $\{x \in U| \lim_{t\to-\infty} \psi_t(x) = w^*\}$ en el cas horizontal. En general, per a un sistema lineal $\dot{y} = Ay$ a $\mathbb{R}^n$, si s és el nombre de valors propis amb part real negativa, i $u = n - s$ el nombre dels que tenen part real positiva, en lloc dels eixos hi haurà 2 subespais, E^s i E^u, de dimensions s i u respectivament (alguna d'elles pot ser zero, eventualment), que són invariants pel flux lineal. E^s i E^u s'anomenen *subespai estable* i *subespai inestable*, respectivament. Aquesta és la situació per al sistema lineal $\dot{w} = Dg(w^*)w$ quan w^* és un punt fix hiperbòlic. Per a l'equació original $\dot{w} = g(w)$ hi ha objectes semblants, ${W^s}_l, {W^u}_l$, de dimensions respectives s i u, anomenats *varietats estable i inestable locals*, respectivament, amb la mateixa definició, però pel flux no lineal

$$ {W^s}_l = \{x \in U| \lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) = w^*\}, \;\; {W^u}_l = \{x \in U| \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) = w^*\}, \tag{6} $$

Naturalment, E^s i E^u són tangents a ${W^s}_l$ i ${W^u}_l$, respectivament, en w^*. Per transport pel flux dels objectes de (6) tenim les varietats globals:

$$ W^s = \bigcup \varphi_t({W^s}_l), \;\; W^u = \cup \varphi_t({W^u}_l), $$

on les unions es fan $\forall t \in \mathbb{R}$, encara que per a la primera és suficient prendre $t < 0$ i per a la segona $t > 0$.

De manera semblant podem estudiar *punts fixos de difeomorfismes*: $\phi(w^*) = w^*$. Si volem estudiar *punts periòdics de període estricte* $k > 1$ (un punt w^* es diu periòdic per ϕ de període estricte k si $\phi^k(w^*) = w^*$, i $\phi^j(w^*) \neq w^*$ per $j = 1, ..., k-1$) sols cal usar ϕ^k en lloc de ϕ. Com que el pas d'equacions diferencials a difeomorfismes el podem mirar com una *exponenciació* (recordem que la solució ψ_t del sistema lineal $\dot{x} = Ax$ és $\psi_t = e^{At}$), direm que un punt fix és hiperbòlic si *tots els valors propis de $D\phi(w^*)$ tenen mòdul diferent de 1.* En aquest cas el teorema de Hartman assegura la conjugació de ϕ i $D\phi(w^*)$ a un entorn de w^*. De manera semblant tenim varietats estable i inestable. Notem, però, que com que es tracta d'un difeomorfisme, els punts de les dues varietats es mouen sobre elles *saltant* i no de manera contínua (vegeu la figura 3).

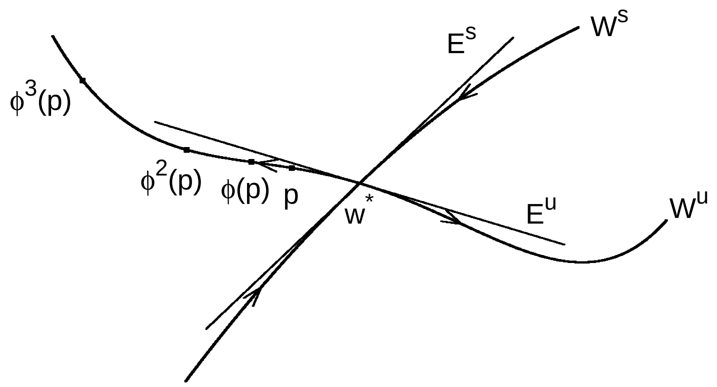


Figura 3

El propi teorema de Hartman mostra l'existència de W^s i W^u però sols ens diu que són contínues (recordem que h és, en general, un homeomorfisme). Però si $g \in \mathcal{C}^r$ o $\phi \in \mathcal{C}^r$ (en els casos continu i discret, respectivament) el *teorema de la varietat estable/inestable* ens assegura que W^s i W^u són també de classe $\mathcal{C}^r$.

És important fer observar que un punt hiperbòlic és *persistent front a pertorbacions*. En efecte, fem-ho per a un difeomorfisme (per a un camp vectorial és semblant). Considerem una família de difeomorfismes, $\phi(w, \lambda)$, que depèn d'un paràmetre λ (pot ser un paràmetre vectorial, és a dir, amb components $\lambda_1, ..., \lambda_p$). Suposem que per $\lambda = \lambda^*$ el difeomorfisme $\phi(w, \lambda^*)$ té un punt fix hiperbòlic w^*. Això vol dir que $D_w\phi(w^*, \lambda^*)$ té tots els valors propis de mòdul diferent de 1, i en particular $1 \notin SpecD_w\phi(w^*, \lambda^*)$, on $SpecA$ vol dir el conjunt de valors propis de la matriu A. Vegem la condició de punt fix en variar λ. Cal que es compleixi

$$G(w, \lambda) = \phi(w, \lambda) - w = 0. \tag{7}$$

Com que $G(w^*, \lambda^*) = 0$ i $D_wG(w^*, \lambda^*) = D_w\phi(w^*, \lambda^*) - Id$ no té valors propis igual a zero, és invertible. El *teorema de la funció implícita* ens diu que, a un entorn de λ^*, hi ha una funció $w = w(\lambda)$ tal que $w^* = w(\lambda^*)$ i $G(w(\lambda), \lambda) = 0$. A més $D_w\phi(w(\lambda), \lambda)$ és propera a $D_w\phi(w(\lambda^*), \lambda^*)$ per continuïtat de $D_w\phi$ i, per tant, també és hiperbòlica si l'entorn és prou petit.

Passem ara a d'altres solucions *senzilles*. Per a una equació com (2) podem considerar solucions periòdiques, complint $\varphi_t(w) = \varphi_{t+T}(w)$ per a algun $T > 0$. Observem que coneixent la solució per $t \in [0, T)$ queda determinada $\forall t \in \mathbb{R}$. Es pot reduir el problema a cercar punts fixos d'un difeomorfisme. En efecte, sigui p un punt de l'òrbita periòdica i $\mathcal{S}$ una superfície transversal a $g(p)$ en el punt p. Llavors l'aplicació de Poincaré està definida a un entorn de p a $\mathcal{S}$ i es té $P(p) = p$. Notem que una altra possibilitat seria demanar $\varphi_T(p) = p$, però és immediat observar que el vector $\frac{d}{dt}\varphi_t(p) = g(\varphi_t(p))$ és una solució de (4). Llavors $D_p\varphi_T(p)$ té un vector propi de valor propi igual a 1, i no podem aplicar el teorema de la funció implícita. Si el camp no és autònom però és T-periòdic, podem cercar solucions T-periòdiques demanant $\varphi(T;0,p)-p=0$. Genèricament $D_p\varphi(T;0,p)$ no tindrà valors propis iguals a 1, encara que hi poden haver altres dificultats (per exemple, mal condicionament numèric si el camp és pertorbació d'un camp autònom i la part que depèn periòdicament del temps és petita).

Tornem a òrbites periòdiques d'un sistema autònom. Direm que són hiperbòliques si, mirant-les com a un punt fix d'una aplicació de Poincaré, són punts fixos hiperbòlics. Quina secció de Poincaré usem és irrellevant, ja que usant una $\mathcal{S}_1$ o una $\mathcal{S}_2$ s'obtenen matrius diferencials conjugades.

Considerem ara altres *objectes invariants*. Una equació diferencial deixa invariant un objecte, A, si $\varphi_t(x)\in A, \forall x\in A, \forall t\in\mathbb{R}$. Si $\phi^n(x)\in A, \forall x\in A, \forall n\in\mathbb{Z}$ direm que el difeomorfisme ϕ deixa A invariant. Els punts fixos,les òrbites periòdiques i les seves varietats estable i inestable, en el cas que siguin hiperbòlics són exemples d'objectes invariants. Però hi pot haver altres objectes invariants: tors k-dimensionals (topològicament equivalents al producte de k cercles), esferes, conjunts de Cantor, etc. Un objecte invariant, A, es diu *normalment hiperbòlic* per un difeomorfisme, ϕ, si per a tot punt $x\in A$ existeix una descomposició de $\mathbb{R}^n$ com $T_xA\oplus E_x^s\oplus E_x^u$, on T_xA és l'espai tangent a A en x, tal que la diferencial del difeomorfisme en x, $D\phi(x)$, envia T_xA, E_x^s i E_x^u en $T_{\phi(x)}A$, $E^s_{\phi(x)}$ i $E^u_{\phi(x)}$, respectivament i a més existeixen constants $C>0$ i $\lambda>0$ tals que $\forall n\in\mathbb{N}$ es compleix:

a) $|D\phi^n(x)\xi|\le Ce^{-\lambda n}|\xi|$ per a tot vector $\xi\in {E_x}^s$,

b) $|D\phi^{-n}(x)\eta|\le Ce^{-\lambda n}|\eta|$ per a tot vector $\eta\in {E_x}^u$.

E_x^s dóna les *direccions estables* en x i E_x^u les *direccions inestables* en x.

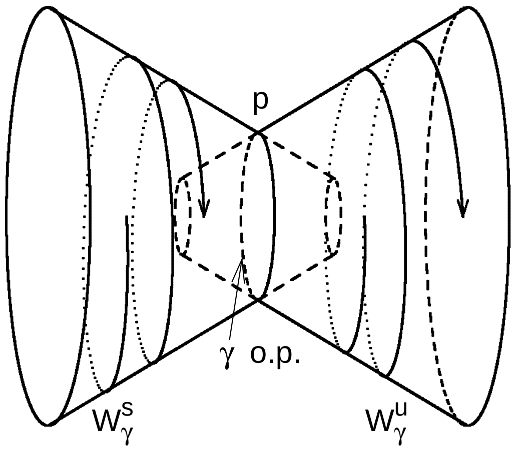


Figura 4

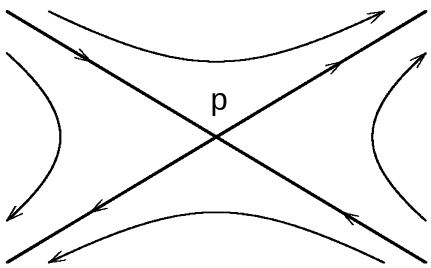


Figura 5

Una definició anàloga val per a fluxos de camps vectorials. Si T_xA, E_x^s i E_x^u, que han de dependre de x de forma contínua, tenen dimensions d_A, d_s i d_u, respectivament, llavors les *varietats estable* i *inestable de* A, definides per

i) $W^s{}_A=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\lim_{k\to\infty} d(\phi^k(x),A)=0\}$,

ii) $W^u{}_A=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\lim_{k\to\infty} d(\phi^{-k}(x),A)=0\}$,

on $d(y,A)$ vol dir la distància del punt y al conjunt A, tenen les dimensions següents: $dim\, W^s_A=d_A+d_s$, $dim\, W^u_A=d_A+d_u$. És clar que $d_A+d_s+d_u=n$. Per exemple, una òrbita periòdica normalment hiperbòlica d'un flux a $\mathbb{R}^3$ té varietats estable i inestable de dimensió 2. Localment es poden imaginar aquestes varietats com a cilindres (vegeu la figura 4), que en una secció de Poincaré per un punt p de l'òrbita periòdica es veuen com a la figura 5.

Fenòmens homoclínics. Impredictibilitat. Atractors estranys

Per simplificar l'exposició suposem que estudiem difeomorfismes del pla. Considerem, per exemple, l'anomenada *aplicació d'Hénon conservativa*, que es pot escriure com

$$\phi_\varepsilon(x, y) = (\overline{x}, \overline{y}),$$

on

$$\overline{x} = x + \varepsilon \overline{y}, \qquad \overline{y} = y + \varepsilon x(1 - x).$$

Aquesta aplicació depèn d'un paràmetre, ε, i és *conservativa* ja que el determinant *det* $D\phi_\varepsilon$ val 1 per a tot valor de ε, x i y, és a dir, preserva l'àrea a $\mathbb{R}^2$.

Considerem el camp hamiltonià $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x(1 - x)$, amb funció energia (o hamiltoniana) $H = y^2/2 - x^2/2 + x^3/3$. El seu *retrat de fase* (és a dir, el dibuix global de les seves òrbites) es mostra a la figura 6.

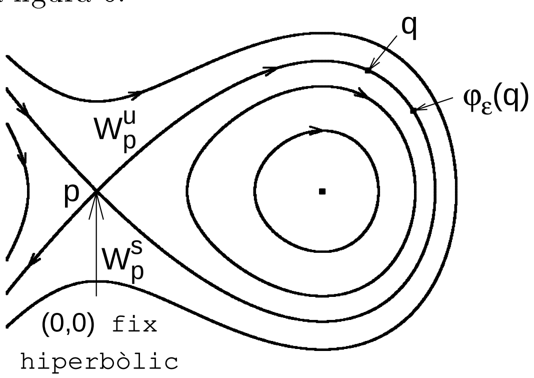


Figura 6

Notem que les varietats estable i inestable del punt fix hiperbòlic ($p \equiv (0, 0)$) coincideixen i estan sobre el nivell d'energia $H = 0$. Naturalment, si considerem el flux temps ε, φ_ε, d'aquest camp vectorial, el seu retrat fase és el mateix (però donat un punt no fix, q, la seva imatge $\varphi_\varepsilon(q)$ està a una distància petita d'ell, si ε també és petit). És immediat (usant la fórmula de Taylor) que

$$\varphi_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon y + \frac{\varepsilon^2}{2} x(1 - x) + O(\varepsilon^3),\ \ y + \varepsilon x(1 - x) + \frac{\varepsilon^2}{2}(1 - 2x) + O(\varepsilon^3)).$$

En particular ϕ_ε i φ_ε coincideixen llevat de termes $O(\varepsilon^3)$. Per tant podem considerar el camp hamiltonià anterior com un *camp límit* del difeomorfisme d'Hénon quan ε tendeix cap a zero. Llavors p és també punt fix de ϕ_ε (en un cas general els punts fixos de ϕ_ε i φ_ε poden distar $O(\varepsilon)$). Les varietats invariants de p per ϕ_ε, W^s_{p,ϕ_ε} i W^u_{p,ϕ_ε}, són properes a les varietats, W^s_p i W^u_p del flux. Forçosament W^s_{p,ϕ_ε} i W^u_{p,ϕ_ε} s'han de tallar. En cas contrari (vegeu la figura 7) considerem un camí com $p\,a\,q\,r\,b\,p$. La seva imatge és $p\,\phi_\varepsilon a\,\phi_\varepsilon q\,\phi_\varepsilon r\,\phi_\varepsilon b\,p$, on hem agafat $p\,a\,q$ sobre W^u_{p,ϕ_ε} i $r\,b\,p$ sobre W^s_{p,ϕ_ε}.

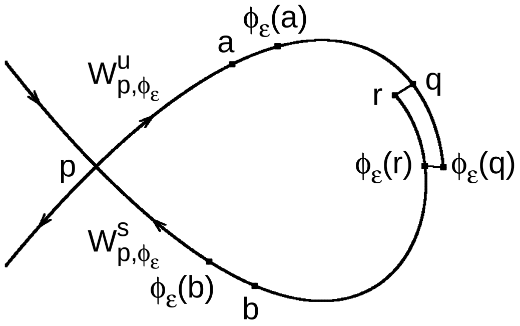


Figura 7

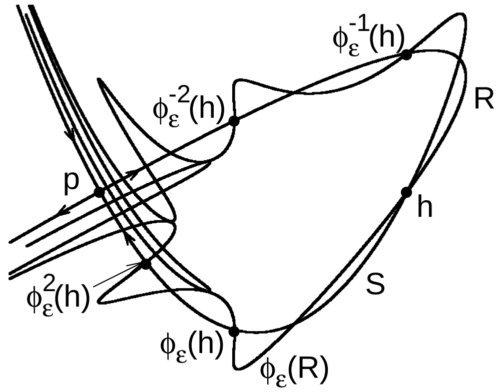


Figura 8

Això porta a un augment d'àrea (la limitada per $r\,q\,\phi_\varepsilon q\,\phi_\varepsilon r$) i,per tant, a un absurd. Així doncs, o bé les varietats coincideixen, $W^u_{p,\phi_\varepsilon} = W^s_{p,\phi_\varepsilon}$, que és una situació no genèrica (de fet, de codimensió infinita, és a dir, calen infinites condicions independents sobre un difeomorfisme per satisfer-la), o bé estem en la situació de la figura 8. Un punt, h, que pertany a $W^u_{p,\phi_\varepsilon} \cap W^s_{p,\phi_\varepsilon}$ s'anomena *homoclínic*. Si, en el cas de dimensió 2 considerat,W^u_{p,ϕ_ε} i W^s_{p,ϕ_ε} es tallen a h formant un angle no nul (com el que es veu a la figura 8), es diu que h és un *punt homoclínic transversal*. En certs casos pot succeir que, a un entorn de h, una varietat invariant *passi a l'altra banda* de l'altra varietat, però essent l'angle igual a zero. (Pensem, per exemple, que les varietats tinguin una tangència de grau senar en h). Llavors es diu que h és *topològicament transversal*, i, des del punt de vista qualitatiu, és com si fossin transversals. Naturalment, també poden existir punts, com el r de la figura 8, on hi ha *tangència homoclínica*. En variar ε el punt r pot *desaparèixer o bifurcar* en diversos punts, mentre que h *persisteix* (i és localment únic) per pertorbació. A més, els diferents *lòbuls*, com $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\phi_\varepsilon\mathcal{R}$, etc., tenen la mateixa àrea.

Per veure les conseqüències dinàmiques d'aquest comportament usarem una família d'aplicacions diferent de l'anterior i més general, que serà usada extensament a continuació:

$$\phi_{\varepsilon,\mu,a}(x,y) = (\overline{x},\overline{y}),$$

on

$$\overline{x} = x + \varepsilon\overline{y}, \qquad \overline{y} = y + \varepsilon[x - x^3 + \mu\, g(x,y,a)].$$

Primer considerem el cas conservatiu: $\mu = 0$ (i, per tant, el valor de g és irrellevant). La situació és molt semblant a la figura 8, però simètrica (vegeu la figura 9, que mostra a la part dreta una ampliació de la zona central per un factor 10).

Estudiem el comportament de punts propers, com l'A i el B, propers també a una branca,$W^{u,+}_p$, de la varietat inestable del punt fix $p \equiv (0,0)$. Denotem per ϕ l'aplicació $\phi_{\varepsilon,0,0}$ per a un valor fixat de ε (per exemple $\varepsilon = 0.5$). Usant un iterat convenient,ϕ^k, els dos punts $\phi^k(A)$ i $\phi^k(B)$ poden estar a una banda i altra de $W^{s,+}_p$ (vegeu la figura 9). Els successius iterats els portaran de nou prop de p, movent-se prop de $W^{s,+}_p$ però en *costats diferents*. Així que, després del pas prop de p un dels punts seguirà prop de la branca $W^{u,+}_p$ i l'altre prop de $W^{u,-}_p$. Naturalment, els dos punts, imatges d'A i B, tornaran a passar una i altra vegada prop de p i cada cop petites variacions permetran *triar* quina banda de W^s_p segueixen. Observem que en la situació de la figura 9 es pot provar el resultat següent:

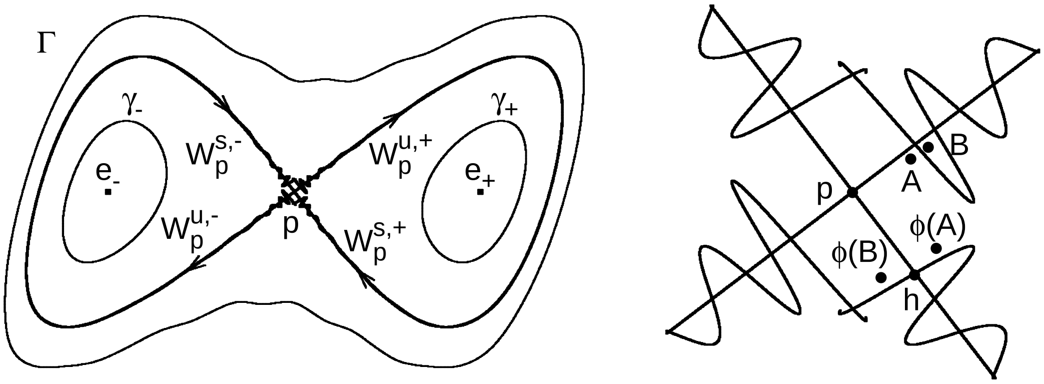


Figura 9

Teorema. *Per a un valor de $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, fixat, i usant la transformació $\phi_{\varepsilon,0,0}$, hi ha un $N \in \mathbb{N}$ tal que, per a tota parella de successions (doblement infinites, és a dir, infinites pels dos costats) $(..., n_{-3}, n_{-2}, n_{-1}, n_0, n_1, , , ,)$, $(..., s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, ...)$ on $n_j \geq N\, \forall j \in \mathbb{Z}$ i s_j és un signe (+ o -), hi ha almenys un punt inicial, A, prop de p, de manera que es mou cap a la banda dreta si s_0 és + o cap a la banda esquerra si s_0 és $-$, que torna a distància mínima de p al cap de n_0 iterats, llavors va a dreta o esquerra segons el signe de s_1, tornant de nou a distància mínima de p al cap de n_1 iterats més, etc. El mateix succeeix usant la iteració inversa amb signes i iterats s_{-1} i n_{-1}; s_{-2} i n_{-2}, etc.*

Naturalment, això ens diu que tenim tota la mena de comportaments que puguem imaginar. Aquest tipus de dinàmica s'anomena *quasialeatòria*, ja que qualsevol successió $(..., n_{-3}, n_{-2}, n_{-1}, n_0, n_1, , , ,)$, $(..., s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, ...)$ és *realitzable*, com si hom pogués triar a l'atzar anar a dreta o esquerra cada cop que es passa prop de p. En altres paraules: el comportament és *impredictible* tot i que el sistema és determinista. Això pot sorprendre una mica i requereix una explicació més detallada.

En primer lloc, pel determinisme, és clar que donat un punt inicial, A, la seva trajectòria queda determinada unívocament, i la successió de *enes* i *esses* associada és única. Examinem de més a prop els passos prop de p. Prop de l'origen podem aproximar ϕ per la seva part lineal, la matriu $\begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$, que té un valor propi $\lambda_u = 1 + \varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2/4} + \varepsilon^2$ tal que el corresponent vector propi és tangent a W_p^u. De manera semblant hi ha un valor propi $\lambda_s = 1/\lambda_u$ amb vector propi tangent a W_p^s. Quan estem prop de p, cada cop que apliquem ϕ allarguem la distància entre punts en un factor λ_u en la direcció de la varietat inestable i la comprimim en un factor λ_s en la direcció de l'estable. Si fem k iterats de ϕ en un entorn prefixat de p (per exemple, el disc de radi 0.1) la component en la direcció inestable quedarà multiplicada, aproximadament, per ${\lambda_u}^k$. Usant, per exemple, $\varepsilon = 0.5$ i $k = 100$ es té un factor d'amplificació que val, aproximadament, $31 \cdot 10^{20}$. Però, és clar, la posició d'A no la coneixem exactament. Si fem simulacions en un ordinador tindrem un error d'arrodoniment (per exemple, error relatiu 10^{-16}). Si estudiem un fenomen natural, i A és l'estat en un cert moment, tindrem un cert error de mesura (10^{-8}, 10^{-12}, etc.) en la seva posició. Així, l'amplificació de distàncies en la direcció inestable fa que perdem el control sobre el comportament. Podria succeir que les iteracions lluny de p (és a dir, fora de l'entorn prefixat) compensessin exactament les dilatacions i escurçaments que tenen lloc dins de l'entorn. Aquest és el cas si, en lloc de $\phi_{\varepsilon,0,0}$ tinguéssim φ_ε, el flux temps ε del hamiltonià $H = y^2/2 - x^2/2 + x^4/4$. Però això és impossible si hi ha un punt homoclínic transversal com el h.

En el cas *conservatiu* ($\mu = 0$) la transformació estudiada preserva àrea i és propera, si ε és petit, al flux φ_ε just esmentat. Els punts fixos e_+ i e_-, de coordenades $(1,0)$ i $(-1,0)$, respectivament, són de tipus el·líptic. Localment φ_ε (i $\phi_{\varepsilon,0,0}$)) es comporta com una rotació. Recordem que, per a una aplicació que preserva àrea, ϕ, si un valor propi de $D\phi(x^*)$ és λ, on suposem que x^* és un punt fix de ϕ, llavors l'altre valor propi és $1/\lambda$. El punt fix s'anomena *el·líptic* si λ és un número complex de mòdul 1, diferent de $+1$ i de -1. Naturalment, la part lineal de l'aplicació al voltant del punt fix és una rotació, ja que, mirant-la en el pla complex, és sols multiplicar per un número de mòdul 1.

Sota el flux φ_ε el període límit, quan tendim cap a un d'aquests dos punts fixos, és $\pi\sqrt{2}$. A mesura que ens apropem a la separatriu (el nivell $H = 0$) el període tendeix cap a infinit, creixent monòtonament. El *número de rotació* es defineix, sobre aquestes òrbites, com la freqüència: $2\pi/\textit{període}$. Com que $\phi_{\varepsilon,0,0}$ és una pertorbació relativament petita ($O(\varepsilon^2)$) de φ_ε i φ_ε és una aplicació de les anomenades *twist* (la derivada del número de rotació respecte de l'energia és diferent de zero), el teorema del twist de Moser (o més generalment, el teorema de Kolmogorov-Arnol'd-Moser, *KAM*) assegura que hi ha corbes invariants per $\phi_{\varepsilon,0,0}$. La figura 9 mostra tres d'aquestes corbes, com γ_+ i γ_- al voltant de e_+ i e_-, respectivament, i Γ a la part exterior. Això fa que els iterats successius de punts com A estiguin confinats. Naturalment, això val si ε és prou petit. Crec que en el nostre exemple cal $|\varepsilon| < 0.56...$. Dibuixant els iterats d'un punt convenient prop de p, sembla que els seus iterats cobreixin una regió de mesura positiva. La pregunta que cal formular és si *l'adherència de l'òrbita té mesura positiva*. És una qüestió que, ara per ara, encara no té resposta.

Anem al cas *no conservatiu*. El que volem fer és raonar com es poden triar la forma que ha de tenir el difeomorfisme i els paràmetres adequats per tal que tingui dinàmica no predictible, no sols per a certs punts prop de la zona on hi havia la separatriu del sistema hamiltonià inicial, sinó per a la major part de punts en un entorn gran al voltant de l'origen. En d'altres paraules, mostrarem com hom pot *fabricar un atractor estrany pas a pas*. Considerem $\mu > 0$ i $g(x,y,a) = y \cdot h(x,y,a)$. Voldriem que els punts fixos (que amb la g de la forma escollida són els mateixos que en el cas conservatiu) fossin així: el $(0,0)$ de tipus sella dissipativa (és a dir $\lambda_u > 1$, $\lambda_s < 1$, $\lambda_u\lambda_s < 1$) i els $(1,0)$ i $(-1,0)$ de tipus focus inestable. A més, voldríem que el determinant de $D\phi_{\varepsilon,\mu,a}$ fos < 1 a tot arreu llevat d'un entorn dels punts e_+ i e_-. L'esmentat determinant és $1 + \varepsilon\mu\frac{\partial g}{\partial y}$. Triem la funció $h(x,y,a)$, per aconseguir el que volem, com

$$-1 + ax^2 - x^4 - \frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{1}{5}y^4.$$

Amb aquesta elecció de h es té $det\, D\phi = 1 + \varepsilon\mu(-1 + ax^2 - (x^2+y^2)^2)$.

El flux límit (quan $\varepsilon \to 0$), que és solució de l'equació diferencial

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = x - x^3 + \mu g(x,y,a)$$

té bifurcacions de Hopf (vegeu la propera secció) en e_+ i en e_- per $a = 2$. Una *connexió homoclínica* es presenta per a valors dels paràmetres de la forma $(\mu, a(\mu))$, on $\lim_{\mu\to 0} a(\mu) \simeq 2.681457...$. Passem a la transformació $\phi_{\varepsilon,\mu,a}$. En primer lloc, remarquem que per tenir un difeomorfisme cal $det\, D\phi > 0$ (o $det\, D\phi < 0$ si no es preserva l'orientació). Si prenem $a > 0$ i punts (x, y) en una bola de radi r centrada a $(0, 0)$, cal $\varepsilon\mu(1 + r^4) < 1$. Per exemple, si agafem $\varepsilon = 0.6$, $\mu = 0.05$, $a \leq 3$, la bola de radi 1.7 té totes les imatges dins de la bola de radi 2.35, on es satisfà la condició de difeomorfisme, i un iterat convenient de la bola torna a caure dins d'ella. Així la bola conté un atractor. Fixats ε i μ existeixen valors de a pels quals hi ha una situació de punts homoclínics com a la figura 9. Pel que acabem de dir, si agafem punts d'una bola de radi convenient, es té

$$\bigcap_{n \geq 1} \phi^n B_r \subset B_r.$$

D'altra banda, com e_+ i e_- són focus repulsors, hi ha corbes com les Γ, γ_+ i γ_- de la figura 9, tals que *l'atractor* està contingut dins la regió limitada per Γ i fora dels dominis limitats per γ_+ i per γ_-. L'atractor pot ser una *corba invariant*, un *punt periòdic* o un altre objecte anomenat *atractor estrany*.

Un *atractor estrany* és un conjunt, $\mathcal{A}$, invariant per la dinàmica (recordem que això vol dir $\phi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$), que atrau tots els punts d'un entorn seu (és a dir, hi ha un obert $\mathcal{U}$, entorn de $\mathcal{A}$, tal que $\phi^n(B) \to \mathcal{A}$ quan $n \to \infty$, $\forall B \in \mathcal{U}$), que té òrbites denses (és a dir, $\exists B \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{\cup_{n \geq 0} \phi^n(B)} = \mathcal{A}$) i que té dependència sensible respecte les condicions inicials (és a dir, que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall \rho > 0$ hi ha un enter $n(\rho, \delta) > 0$ de manera que si $d(A, B) = \rho$ es té $d(\phi^k(A), \phi^k(B)) > \delta$ per a algun $k \geq n(\rho, \delta)$).

En el nostre cas, l'atractor estrany està contingut a l'adherència, $\overline{W^u_p}$, de la varietat inestable del punt sella. La figura 10 mostra l'atractor que s'obté agafant l'aplicació de la família $\phi_{\varepsilon,\mu,a}$ pels valors dels paràmetres següents: $\varepsilon = 0.6$, $\mu = 0.05$ i $a = 2.8$. El punt inicial ha estat $x = 0.01, y = 0$. S'ha calculat primer un milió d'iterats, que es considera com un transitori, i s'ha dibuixat el milió d'iterats següent. Un dels problemes bàsics és mostrar que, fixats ε i μ, *la mesura del conjunt de valors d'a per als quals hi ha atractor estrany és positiva*, encara que el dit conjunt sigui, possiblement, totalment disconnex (és a dir, no conté cap interval obert). Vegeu la secció sobre creació/destrucció d'atractors per a comentaris addicionals.

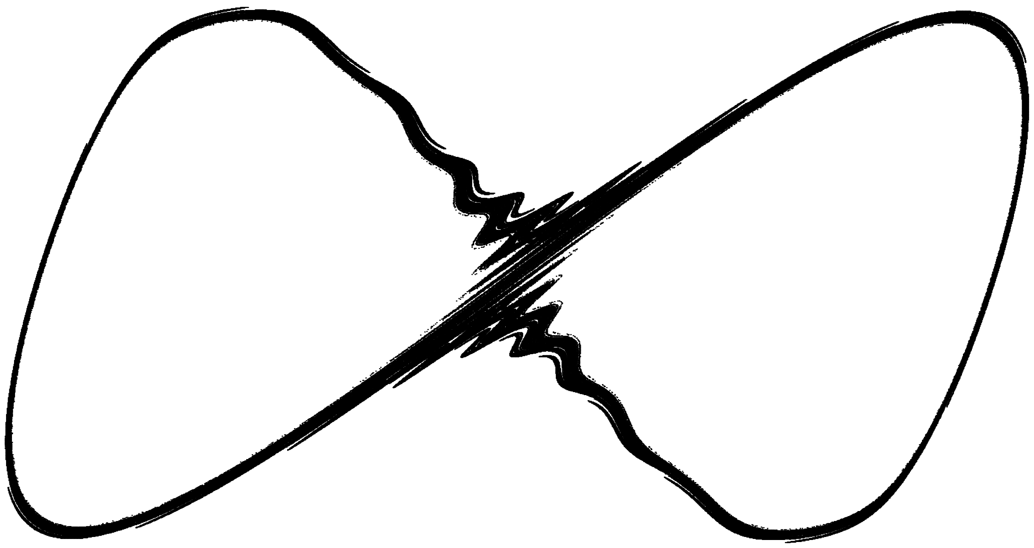


Figura 10

En aquest moment cal fer esment del problema que representa l'existència d'atractors estranys pel que fa a la repetitibilitat dels experiments. Si un fenomen natural és determinista, però té una dinàmica que dóna lloc a atractors estranys i repetim un experiment per confirmar la validesa d'un model matemàtic tindrem problemes. En efecte, els diferents experiments es fan amb *paràmetres lleugerament diferents* i amb *condicions inicials també lleugerament diferents*. Com a conseqüència de la variació de l'atractor amb els paràmetres i de la dependència sensible a les condicions inicials, els resultats poden ser, aparentments, molt diferents. Si no pensem que hi poden haver atractors estranys podrem creure que el model no és correcte o, fins i tot, que hom no pot admetre que el fenomen és determinista. Llavors cal entendre el model, les diverses bifurcacions que té per a valors dels paràmetres al voltant d'un valor donat, i l'estructura geomètrica de l'atractor per interpretar correctament les dades experimentals i poder *validar* el model. Es poden calcular diferents quantitats associades a l'atractor, com són *els exponents de Lyapunov*, *la dimensió de Hausdorff*, *l'espectre de Fourier*, etc. i comparar-los amb els corresponents als experiments. També hom pot *dibuixar* l'atractor i comparar la seva forma i la manera com els successius iterats es reparteixen sobre ell (és a dir, la *mesura invariant* que hi pugui haver sobre l'atractor) amb la corresponent forma del conjunt de les dades experimentals quan hom pren simultàniament dades de diverses magnituds i es projecten en algun espai, i amb la distribució probabilística experimental dels punts en diverses regions. Per a les definicions de: exponents de Lyapunov, dimensió de Hausdorff, espectre de Fourier, etc., vegeu altres articles en aquest recull o les referències bibliogràfiques a la darrera secció.

Bifurcacions locals

Considerem un difeomorfisme, ϕ, i un entorn d'ell. Cal precisar a quin espai considerem l'entorn. Pot ser, per exemple, l'espai dels difeomorfismes diferenciables, o els de classe $\mathcal{C}^r$, $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$, etc. Aquí considerarem el cas $\mathcal{C}^\omega$, és a dir, el cas dels difeomorfismes analítics, i així no es presentarà cap dificultat per manca de diferenciabilitat. Direm que ϕ és *estructuralment estable* si tot ψ de l'entorn és *equivalent* a ϕ. Recordem que ϕ i ψ són equivalents si hi ha un homeomorfisme, h, que envia òrbites de ϕ en òrbites de ψ. En altres paraules, llevat d'un canvi de variable, h, podem considerar que ϕ i ψ són el mateix difeomorfisme.

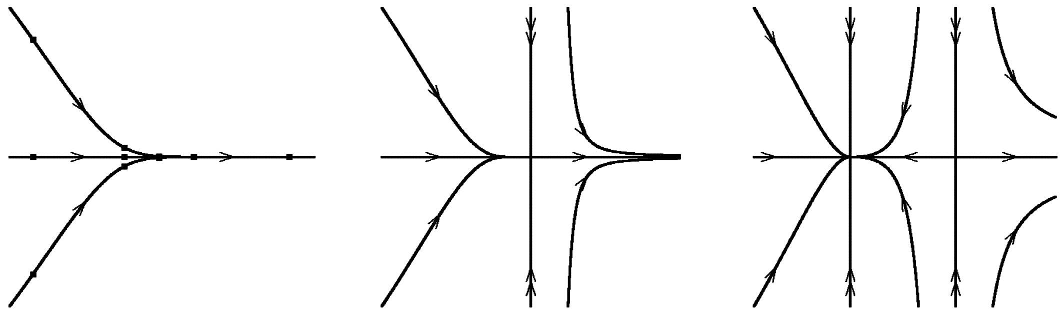
Si per a tot entorn de ϕ és possible tenir difeomorfismes ψ que *no* són equivalents a ϕ, diem que per a ϕ es produeix una bifurcació. És a dir, en tot entorn de ϕ hi ha algun difeomorfisme que *no* es comporta com ϕ.

Hi ha bifurcacions que tenen un caire purament local. Això vol dir que és suficient examinar un entorn d'un punt (a l'espai de fases) per detectar la bifurcació. N'hi ha d'altres que necessiten una informació més global per ésser detectades. Començarem veient algunes de les bifurcacions locals més senzilles en difeomorfismes del pla. Presentem els exemples més elementals: *sella-node*, *doblament de període* i *bifurcació de Hopf*.

Sigui ϕ_μ la següent família d'aplicacions (amb (x, y, μ) prop de $(0, 0, 0)$):

$$\phi_\mu(x, y) = (\mu + x + x^2, \lambda y),$$

on suposem $0 < \lambda < 1$. Cerquem punts fixos. És clar que cal $y = 0$ i, a més, $\mu + x + x^2 = x$. Si $\mu > 0$ no hi ha cap punt fix. Si $\mu = 0$ hi ha un punt fix del tipus que s'anomena *sella-node*. Per a $\mu < 0$ tenim 2 punts fixos, $x = \pm\sqrt{|\mu|}$. El punt fix amb signe negatiu és un node i el punt amb signe positiu és una sella. Observem que en la direcció x l'estabilitat del node és *feble* (o, comparativament, en la direcció y és *forta*), ja que el valor propi és més petit que 1, però molt proper a 1. Això fa que tots els punts, llevat dels que hi ha a la varietat *fortament* estable (en la direcció de l'eix y), entrin tangents a la direcció de x. Observem també, que per a $\mu = 0$ el semieix $x > 0$ és (feblement) inestable i el semieix $x < 0$ és (feblement) estable. La figura 11 il·lustra aquesta bifurcació, que es produeix per $\mu = 0$.



$\mu > 0$ $\mu = 0$ $\mu < 0$

Figura 11

Anem ara al cas de doblament de període. Per això considerem l'aplicació $\phi_\mu(x,y) = (\overline{x}, \overline{y})$, on

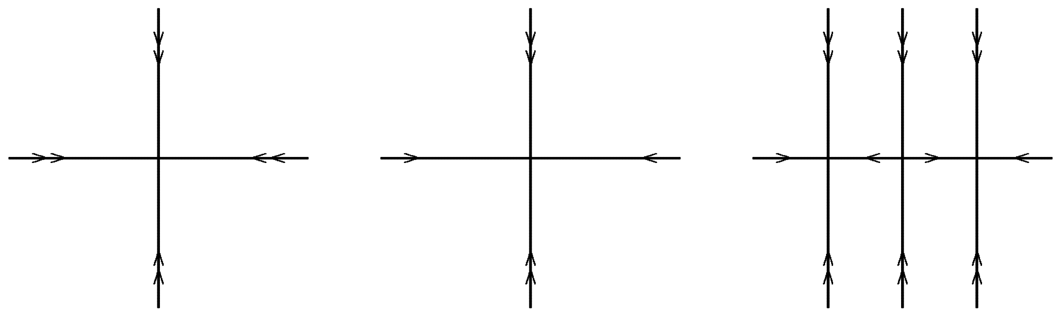
$$\overline{x} = (-1+\mu)x + ax^2 + bx^3 + O(|x|^4), \quad \overline{y} = \lambda y, \quad |\lambda| < 1,$$

on suposem a i b finits i fixats, i μ a un entorn de 0. És clar que $(0,0)$ és un punt fix, de tipus atractor si $\mu > 0$ i sella si $\mu < 0$. Calculem l'aplicació ϕ^2, obtinguda per composició de ϕ amb ella mateixa: $\phi^2(x,y) = (\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$, on

$$\overline{\overline{x}} = (1 - 2\mu + O(\mu^2))x + ax^2 O(\mu) + x^3(-2b - 2a^2 + O(\mu)) + O(|x|^4), \qquad \overline{\overline{y}} = \lambda^2 y.$$

Cerquem altres punts fixos. Per això usem $\overline{\overline{x}} = x$ i simplifiquem. Es té

$$-2\mu + O(\mu^2) + xaO(\mu) + x^2(-2b - 2a^2 + O(\mu)) + O(x^3) = 0.$$



$\mu > 0$ $\mu = 0$ $\mu < 0$

Figura 12

Suposem $b + a^2 \neq 0$ (altrament necessitem termes d'ordre més alt) i, per fixar idees $b + a^2 > 0$ (l'altre cas és semblant). Llavors tenim que, si $\mu > 0$ no hi ha altres punts fixos de ϕ^2 a un entorn de zero, i si $\mu < 0$ tenim $x = \pm(-\mu/(b+a^2))^{1/2} + O(\mu)$. A més,

$\frac{\partial \overline{x}}{\partial x} = 1 + 4\mu + O(|\mu|^{3/2}) < 1$. Així tenim 2 punts fixos per ϕ^2, que formen una òrbita periòdica de període 2 que és de tipus node. La figura 12 mostra la situació en aquest cas (per ϕ^2).

La següent bifurcació local que considerem és la de Hopf, com la que es presenta a l'exemple $\phi_{\varepsilon,\mu,a}$ donat abans, quan a passa d'un valor < 2 a un valor > 2. Per això considerem l'aplicació

$$\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_2(x,y) \\ Q_2(x,y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_3(x,y) \\ Q_3(x,y) \end{pmatrix} + \dots ,$$

on $\alpha + i\beta = \lambda = (1+\mu)_{\theta+O(\mu)}$, usant notació de mòdul i argument, és el valor propi associat a ϕ en $(0,0)$ i P_j, Q_j volen dir polinomis homogenis de grau j. Usant notació complexa, $z = x+iy$, tenim que $\phi(z) = \lambda z + A_2(z,\overline{z}) + \dots$, on A_2 és un polinomi homogeni de grau 2 en les variables z i $\overline{z}$ (conjugat de z).

Fem primer uns canvis de variable (l'anomenat *pas a forma normal* per aquest problema) per simplificar l'expressió de ϕ. Per això, introduïm una nova variable, ζ, tal que $z = \zeta + B_2(\zeta,\overline{\zeta})$, on B_2 és un polinomi de grau 2, a determinar amb l'objectiu de fer desaparèixer A_2 en l'expressió de ϕ. La transformació inversa és $\zeta = z - B_2(z,\overline{z}) + O(|z|^3)$. Si cerquem ϕ en funció de ζ tenim:

$$\begin{aligned} \zeta \ \to \ & \zeta + B_2(\zeta,\overline{\zeta}) \to \lambda\zeta + \lambda B_2(\zeta,\overline{\zeta}) + A_2(\zeta,\overline{\zeta}) + O(|\zeta|^3) \to \\ \to \ & \lambda\zeta + \lambda B_2(\zeta,\overline{\zeta}) + A_2(\zeta,\overline{\zeta}) - B_2(\lambda\zeta,\overline{\lambda\zeta}) + O(|\zeta|^3). \end{aligned}$$

La condició a complir per B_2 és

$$\lambda B_2(\zeta,\overline{\zeta}) + A_2(\zeta,\overline{\zeta}) - B_2(\lambda\zeta,\overline{\lambda\zeta}) = 0.$$

Si escrivim

$$\begin{aligned} A_2(\zeta,\overline{\zeta}) &= a_{2,0}\zeta^2 + a_{1,1}\zeta\overline{\zeta} + a_{0,2}\overline{\zeta}^2, \\ B_2(\zeta,\overline{\zeta}) &= b_{2,0}\zeta^2 + b_{1,1}\zeta\overline{\zeta} + b_{0,2}\overline{\zeta}^2, \end{aligned}$$

tenim:

$$b_{2,0} = \frac{a_{2,0}}{\lambda^2 - \lambda}, \qquad b_{1,1} = \frac{a_{1,1}}{\lambda\overline{\lambda} - \lambda}, \qquad b_{0,2} = \frac{a_{0,2}}{\overline{\lambda}^2 - \lambda}.$$

Cal que els denominadors no siguin nuls a un entorn de $\mu = 0$, és a dir, que λ no sigui igual a 1 o a una arrel quadrada o cúbica de la unitat o, en d'altres paraules, $\theta \neq 0, \pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$. Havent eliminat els termes quadràtics ho intentem amb els cúbics. Sigui ara $\phi(z) = \lambda z + A_3(z,\overline{z}) + O(|z|^4)$ i cerquem un canvi $z = \zeta + B_3(\zeta,\overline{\zeta})$. Tindríem

$$b_{3,0} = \frac{a_{3,0}}{\lambda^3 - \lambda}, \qquad b_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{\lambda^2\overline{\lambda} - \lambda}, \qquad b_{1,2} = \frac{a_{1,2}}{\lambda\overline{\lambda}^2 - \lambda}, \qquad b_{0,3} = \frac{a_{0,3}}{\overline{\lambda}^3 - \lambda}.$$

És clar que si $\mu = 0$ i $|\lambda| = 1$ el denominador de $a_{2,1}$ es fa zero. Així doncs, aquest terme no es pot eliminar. Sí que hom pot eliminar els altres si, a més de les condicions anteriors, es té $\theta \neq \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$.

En resum, després de canvis de variable que podem fer si λ és diferent d'arrels d'ordre 1,2,3 i 4 de la unitat, quan $\mu = 0$, tenim ϕ reduïda a la *forma normal* següent (continuem usant idèntic nom per l'aplicació (ϕ) i per la variable (z)):

$$\phi : z \to \left(\lambda + a_{2,1}r^2\right) z + O(|z|^4), \ r^2 = z\overline{z}.$$

El complex $\lambda + a_{2,1}r^2$ (notem que $a_{2,1} \in \mathbb{C}$) és de la forma

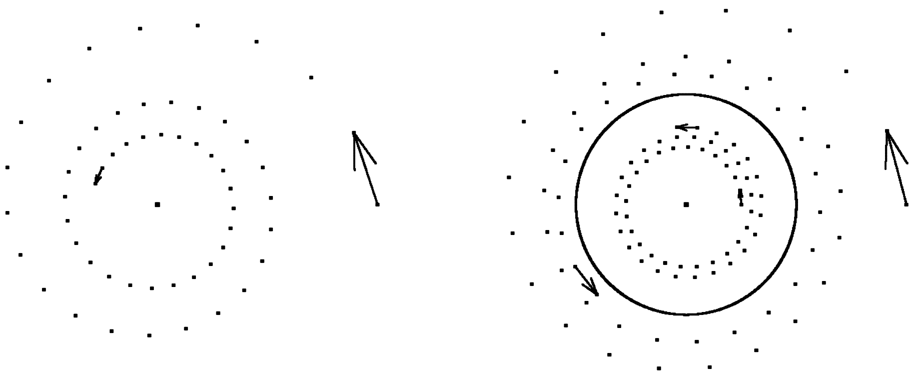
$$(1+\mu+\gamma r^2+O(r^3))_{\theta+O(\mu)+O(r^2)}, \ \gamma \in \mathbb{R}.$$

Suposem $\gamma \neq 0$ (altrament cal fer més passos de la forma normal) i, per fixar idees, suposem $\gamma < 0$ (si $\gamma > 0$ els càlculs són semblants). Fent un escalat de z podem suposar $\gamma = -1$. Així tenim

$$\phi : z \to \left[(1+\mu-r^2)_{\theta+O(\mu)+O(r^2)}\right] z + O(r^4).$$

Si, de moment, deixem de banda el terme $O(r^4)$, l'aplicació té trivialment un *cercle invariant* per $r = \sqrt{\mu}$. A més el cercle és atractor, ja que considerant l'aplicació en el que fa referència als radis tenim $r \to (1+\mu-r^2)r$, i la derivada en el valor fix $r = r^* = \sqrt{\mu}$ val $1-2\mu$. Usant ara raonaments de contracció en la direcció transversal al radi es demostra l'existència d'una corba invariant per ϕ quan s'inclou l'efecte dels termes $O(r^4)$.

Resumint, per a $\mu < 0$ es té que l'origen és atractor i els punts a un entorn seu es mouen en òrbites (discretes, és clar) que estan sobre espirals (com en el cas d'un focus atractor per a un camp del pla). Quan $\mu > 0$ es té una corba invariant a una distància $O(\sqrt{\mu})$ de l'origen. Notem que, sobre aquesta corba, el número de rotació pot ser racional o irracional. Si és irracional l'atractor que *observarem* experimentalment és la pròpia corba invariant, ja que les òrbites hi són denses. En el cas racional, si el número de rotació és p/q, amb $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$, genèricament hi ha òrbites periòdiques de període q, alternativament atractores i repulsores, per la qual cosa sols veurem les òrbites periòdiques atractores. Vegeu la figura 13.



$\mu > 0$ $\qquad\qquad$ $\mu < 0$

Figura 13

Bifurcacions globals. Creació/destrucció de dinàmica no predictible

Anem ara al cas de les *bifurcacions globals*. Presentarem els fenòmens més interessants: les tangències homoclíniques i heteroclíniques. Sigui p un punt fix hiperbòlic d'un difeomorfisme (cosa semblant faríem amb un flux o amb d'altres objectes hiperbòlics: òrbites periòdiques, tors invariants, etc.). Direm que h és un *punt de tangència homoclínica* associat a p si $h \in W_p^u \cap W_p^s$ i les varietats W_p^u i W_p^s són tangents en el punt h (amb ordre de tangència parell!). Siguin ara p i q dos punts fixos hiperbòlics diferents. Direm que h és un *punt de tangència heteroclínica* associat a p i q si $h \in W_p^u \cap W_q^s$ i les varietats W_p^u i W_q^s són tangents en el punt h. En el cas que p i q s'obtinguin l'un de l'altre per una potència de ϕ ($\phi^k(p) = q$ per algun $k \in \mathbb{Z}$) i $h \in W_p^u \cap W_q^s$ amb tangència entre les varietats, direm també que la tangència és homoclínica.

Tan aviat com tenim un punt homoclínic, tenim *l'element bàsic per crear dinàmica impredictible* (vegeu la figura 9). Els dos punts bàsics per a aquesta impredictibilitat són:

i) *Hiperbolicitat*, que eventualment pot ser feble, és a dir, sols en un sentit topològic, com seria el cas de l'aplicació $(x, y) \to (x + x^3, y - y^3)$ que té valors propis iguals a 1 en el punt $(0, 0)$, però que té els eixos com a varietats inestable i estable, si bé la tendència cap (o allunyant-se de) el punt fix és molt lenta.

ii) *Realimentació*, és a dir, la dinàmica pot tornar a portar els punts una i altra vegada prop del punt fix hiperbòlic. Naturalment, cal que la realimentació porti els punts *a una banda i altra* de l'hiperbòlic. Això vindrà garantit per la transversalitat dels punts homoclínics.

Quan depassem la tangència homoclínica i, genèricament tenim transversalitat, es crea un conjunt que, en el cas dissipatiu podem anomenar *atractor estrany en potència* i en el cas conservatiu *suport potencial de dinàmica impredictible*. Aquest no és més que l'adherència, $\overline{W_p^u}$, de la corresponent varietat inestable. En tot el que segueix ens restringirem al cas dissipatiu (bé globalment o sols a la zona on està situada $\overline{W_p^u}$).

L'hem anomenat atractor *en potència*, ja que pot ser que l'atractor sigui un altre objecte, malgrat que el dit conjunt $\overline{W_p^u}$ compleixi les condicions per ser atractor estrany. En efecte, considerem el cas de la figura 14.

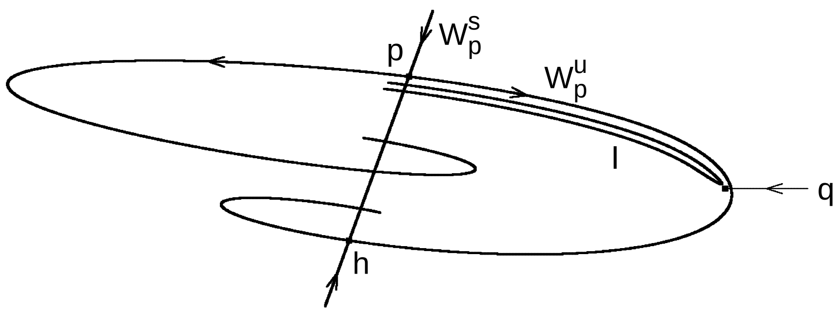


Figura 14

En principi tenim h, homoclínic transversal, i p hiperbòlic. Pot ser, però, que una de les *llengüetes* de W_p^u, l, es plegui tal com s'indica a la figura. L'estudi de la dinàmica prop de la seva extremitat mostra que poden aparèixer punts, com el q, que tinguin una òrbita periòdica atractora. Segons quina sigui la seva situació pot atraure punts d'un entorn suficientment gran que arribi a tallar W_p^u. Llavors, els punts que *es passejarien de forma quasialeatòria* per $\overline{W_p^u}$ són finalment atrets per q (i la seva òrbita) i no es *veu* l'atractor estrany. Ha estat destruït per una òrbita periòdica atractora. Cal dir, però, que en certs casos sí que es *veu l'atractor estrany* (encara que finalment resulti no ser un atractor). En efecte, si l'entorn de q que és atret localment per q i la seva òrbita, talla localment W_p^u en un segment prou petit, pot ser necessari un *transitori* prou llarg abans que els punts no siguin atrets cap a q. Així podríem observar un moviment que sembli errar per

W_p^u durant 10^6 iterats per anar a parar a q posteriorment. És clar que pot ser que q no atregui punts de W_p^u i tinguem simultàniament dos atractors: un atractor estrany i una òrbita periòdica.

Això es pot estendre a una multiplicitat molt més elevada del nombre d'atractors. Per exemple, poden coexistir simultàniament 5 atractors estranys i 18 òrbites periòdiques. Cada un té la seva *conca d'atracció* (conjunt de punts que van a parar a ell per iteració). Això explica el fenomen de la histèresi. Imaginem que el difeomorfisme depèn d'un paràmetre, ϕ_μ i fem el següent: donat un punt inicial calculem 10^6 iterats i observem a quin atractor sembla anar. Després variem lentament μ i, partint de l'últim punt que teníem a l'espai de fases, calculem de nou 10^6 iterats. Repetim el procediment diverses vegades. En variar μ varien els seus atractors, les fronteres de les seves conques d'atracció, etc. Per a un cert valor de μ podem canviar d'atractor, bé perquè l'anterior ha desaparegut o perquè la variació de μ ens fa canviar de conca d'atracció. Si, posteriorment, tornem al valor inicial del paràmetre, és clar que l'atractor pot ser diferent del que teníem inicialment.

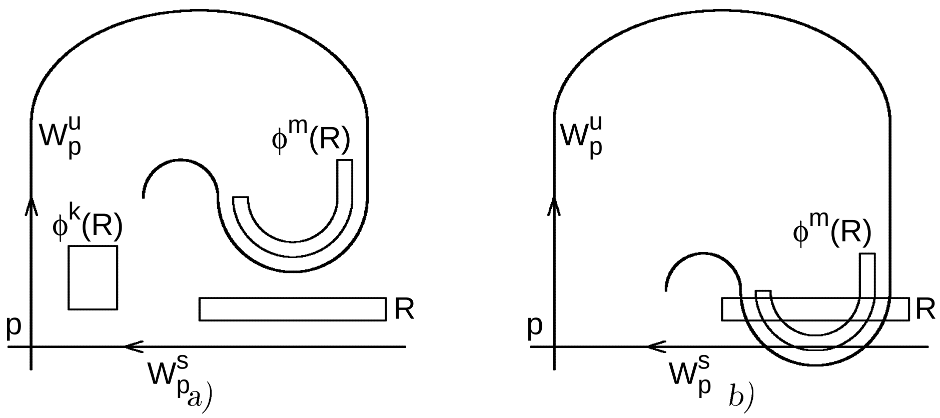
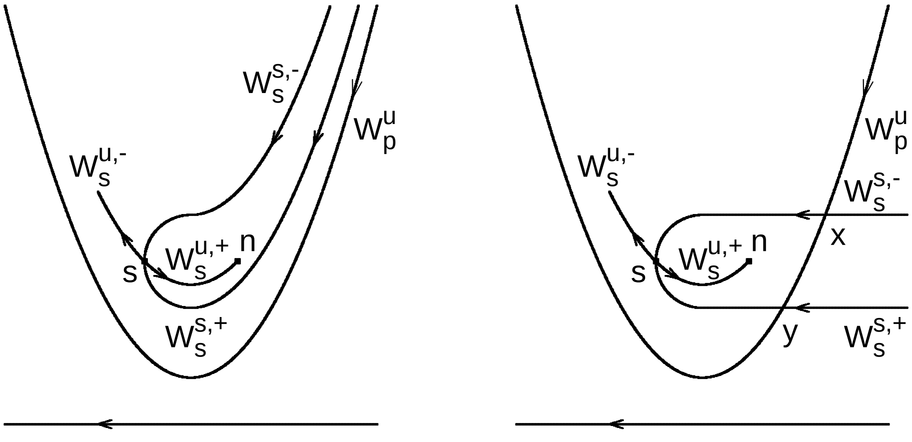


Figura 15

Examinem amb més detall la creació d'una òrbita periòdica prop de W_p^u. A la figura 15 *a)* es mostren W_p^s i W_p^u prop d'una tangència homoclínica. La figura pot ser més complicada i W_p^u pot tenir altres *plecs* que ja originin punts homoclínics transversals. Considerem un petit rectangle com $\mathcal{R}$ que té una imatge com $\phi^m(\mathcal{R})$ per a una potència adient de ϕ (a la figura 15 *a)*, es dibuixa també $\phi^k(\mathcal{R})$ que és la imatge per a un $k < m$, mostrant la compressió en la direcció local de W_p^s i dilatació en la de W_p^u). Suposem que $\mathcal{R}$ i $\phi^m(\mathcal{R})$ no es tallen i, per tant, no hi ha punts de període m a $\mathcal{R}$.

En el cas *b)* $\mathcal{R}$ i $\phi^n(\mathcal{R})$ es tallen i, sota hipòtesis molt generals, es pot demostrar que a cada una de les dues components de la intersecció hi ha un punt m-periòdic. En variar d' *a)* a *b)* es produeix una bifurcació de tipus sella-node per a un cert valor de μ. Si p és una sella dissipativa (és a dir, el producte dels valors propis compleix $\lambda_u \cdot \lambda_s < 1$) i m és prou gran, el punt node creat és atractor. A més, localment, la seva conca d'atracció està limitada per les branques de la varietat estable de la sella que es crea al mateix temps que el node. La situació s'esquematitza a la figura 16, on es mostra un petit entorn.

Siguin s i n la sella i el node creats per bifurcació. Localment, és a dir, poc després de la bifurcació, una de les branques de W_s^u ($W_s^{u,+}$) és atreta per n. Punts prop de W_s^s (de qualsevol de les seves branques, $W_s^{s,\pm}$) passen per iteració (per ϕ_m) prop de s i se'n van a n. En el cas *a)* de la figura 16 això no destrueix (almenys localment) la possibilitat que $\overline{W_p^u}$ sigui un atractor estrany, però sí en el cas *b)*, on veiem els x, y heteroclínics.



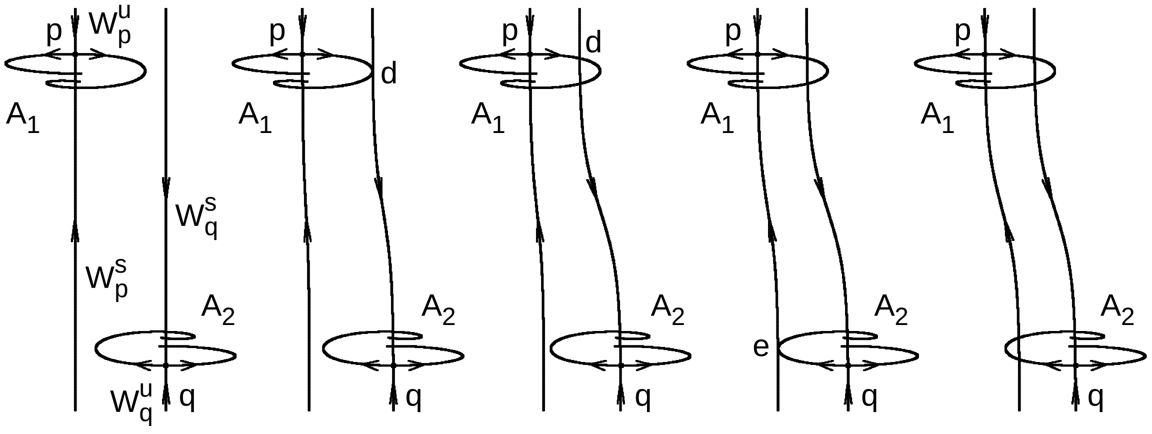
a) *b)*

Figura 16

De manera més general podem tenir una varietat invariant inestable d'un punt p amb homoclínics transversals, que es comporti com a atractor estrany i que sigui destruït per un altre atractor, estrany o no, mitjançant una *tangència heteroclínica*.

La figura 17 mostra una *destrucció d'un atractor estrany* per un altre atractor estrany (vegeu la figura 17 casos *a)* a *c)*). Posteriorment (cas *d)*) hi ha una altra tangència heteroclínica i en la situació final l'atractor està format per la unió dels dos que hi havia al principi, amb una transició més o menys ràpida de l'un a l'altre.

En el cas *a)* observem 2 atractors estranys independents, A_1 i A_2. En el cas *c)* A_1 és destruït per A_2 a causa de l'existència de punts heteroclínics transversals com el d i sols observem A_2. En el cas *e) cada un destrueix l'altre*, amb la qual cosa els punts van de l'un a l'altre i observem $A_1 \cup A_2$ com a atractor. Podem dir que hi ha una *cooperació* entre els atractors. Les bifurcacions (globals) es presenten en el casos *b)* i *d)*, associades a tangències heteroclíniques en els punts d i e, respectivament.



a) *b)* *c)* *d)* *e)*

Figura 17

Naturalment, les idees exposades mostren casos molt senzills. En dimensió superior o amb altres objectes hiperbòlics més complexos, la situació esdevé geomètricament més complicada, però els punts clau són els mateixos.

Finalment tornem per un moment a la figura 14. Hem dit que a la punta de les llengüetes de W_p^u poden haver-hi punts d'òrbites periòdiques atractores. Han estat creats per un mecanisme com el descrit a les figures 15 i 16. Ara bé, petites variacions de μ poden provocar que els extrems dels successius plecs de W_p^u es moguin ràpidament (en variar μ). Això fa que el pas d'una situació com 15 *a)* a 15 *b)* es doni molt freqüentment. En aquest pas hi ha un interval (obert) de valors de μ pel qual hi ha una òrbita periòdica atractora (associada al node n). Es conjectura que, genèricament, el conjunt de valors de μ per als quals hi ha una òrbita periòdica atractora és dens en exemples del tipus descrit. (Aquest fet ha estat provat recentment per a algunes famílies senzilles). Que el conjunt de valors de μ per als quals hi ha un atractor periòdic sigui dens i obert no vol dir que tingui una mesura gaire gran. Al contrari, la mesura del conjunt de valors de μ per als quals hi ha atractor estrany pot ser gran, amb la qual cosa aquest serà el tipus de comportament *més freqüentment observat* en certs rangs de valors dels paràmetres. (També aquest fet ha estat demostrat per a famílies de difeomorfismes molt senzilles). Les *finestres*, a l'espai de la μ, per les quals hi ha una òrbita periòdica poden ser extraordinàriament petites. Fent un símil podríem considerar l'interval $I = [0, 1]$ i un conjunt obert (és unió d'oberts) i dens (ja que conté els racionals)

$$\bigcup_{\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}\cap I}\left(\frac{r}{s}-\frac{10^{-3}}{s^3},\frac{r}{s}+\frac{10^{-3}}{s^3}\right).$$

Per a cada s la mesura de la unió d'intervals és $2 \cdot 10^{-3}/s^2$. En fer la reunió de tots (hi ha intervals no disjunts) la mesura, m, compleix

$$m < 2 \cdot 10^{-3}\sum\nolimits_{s\geq 1} s^{-2} = \frac{\pi^2}{3}\cdot 10^{-3}.$$

El complement és totalment disconnex, però té mesura $> 1 - \frac{\pi^2}{3}\cdot 10^{-3}$, és a dir, gairebé total.

Aquest tipus de comportament es dóna per a models que tinguin varietats invariants en les quals el nombre de direccions inestables sigui 1 (independentment de la dimensió de l'espai de fases, àdhuc infinita, vegeu més endavant). Si el nombre de direccions inestables que tenen certs objectes invariants és superior a 1, llavors hi poden haver *conjunts oberts de l'espai de paràmetres per als quals hi ha atractor estrany*. A més, *el nombre d'exponents de Lyapunov positius* pot ser gran (encara que a la pràctica no ho és massa. Vegeu els comentaris a la secció on parlem de problemes *infinit-dimensionals*). Aquest és un tema de recerca molt activa actualment amb gairebé tots els problemes oberts. L'autor té exemples de transformacions dissipatives a $\mathbb{R}^3$ de tipus molt elemental (venen donades per polinomis de segon grau) que mostren atractors amb 2 exponents de Lyapunov positius. La forma d'aquests atractors es pot imaginar pensant en un mocador que es plega, primer en una direcció i després en una altra. Llavors cal iterar els plecs de manera que una línia que travessi el mocador el talli en un conjunt de Cantor. Així, hom parla de l'atractor tipus *mocador plegat*. En variar els paràmetres d'aquestes aplicacions de segon grau, dins d'una família molt senzilla, es tenen atractors de diverses menes: punts fixos, periòdics, corbes invariants o conjunts finits de corbes invariants, atractors com en el cas de Hénon, atractors semblants al producte de l'atractor d'Hénon per un cercle, i un gran nombre de tipus diferents d'atractors estranys (diguem que s'observen, almenys, un centenar de tipus d'atractors estranys *aparentment diferents*).

Models universals

Una característica molt important que apareix quan hom analitza els sistemes dinàmics és l'aparició de models universals. Això permet simplificar els problemes de *classificació* dels dits sistemes i al mateix temps té importants conseqüències pràctiques.

Considerem primer el cas elemental d'una bifurcació local. Hem comentat que la *reducció a forma normal* i la posterior anàlisi d'aquesta forma normal permet dir com té lloc la bifurcació. Si el nombre de paràmetres rellevants per *desplegar* la bifurcació (és a dir, per poder estudiar *totes* les transformacions properes a la que presenta la bifurcació analitzada) és k, diem que la bifurcació té *codimensió* k. Els exemples aquí presentats tenen codimensió 1 per simplicitat, però hom coneix amb detall moltes bifurcacions de codimensions 2 i 3 (encara que l'estudi és més complicat i obliga a càlculs més llargs). La conseqüència d'aquestes anàlisis és que llavors es pot descriure *qualitativament* (i també *quantitativament* amb suficient precisió) absolutament *totes* les coses que poden passar prop de la bifurcació. En variar els paràmetres podem predir el comportament local en tots els casos. A més, la *forma normal* ens dóna un model *senzill i acurat* d'aquest comportament local.

Aquest tipus d'estudi es pot fer també per a bifurcacions globals. Però ara cal un conjunt molt més gran d'informacions. Considerem, per exemple, el cas d'una tangència homoclínica en un punt h. D'una banda, ens cal una descripció de la dinàmica prop de l'objecte invariant a què està associat el punt homoclínic. Per simplificar suposem que és simplement un punt hiperbòlic, p. Fa falta, doncs, una forma normal (incloent la dependència respecte de paràmetres) a un entorn de p. Sigui ϕ_p aquesta forma normal. D'altra banda, ens cal una descripció de les aplicacions que passen d'un entorn de la varietat inestable de p, prop de p, a un entorn de h (aplicació que anomenarem ϕ_u), i d'un entorn de h a un entorn de la varietat estable prop de p (aplicació que anomenarem ϕ_s). Naturalment les ϕ_u i ϕ_s són composició del difeomorfisme inicial, ϕ, un cert nombre de vegades o, si estudiem un flux φ_t, són les aplicacions φ_{t_u} i φ_{t_s} per a valors convenients de t_u i t_s. A més, possiblement, el nombre d'iteracions que cal fer o els valors de t_u i t_s depèn dels paràmetres. Les aplicacions ϕ_u i ϕ_s poden obtenir-se mitjançant les equacions de la primera variació (i, possiblement variacions d'ordre superior, si bé en certs problemes delicats fa falta un nombre no acotat d'equacions variacionals, la qual cosa presenta diversos problemes tècnics).

L'estudi de l'aplicació de *retorn* prop de h (diguem-ne R_h) es fa composant les aplicacions ϕ_s, ϕ_p i ϕ_u: $R_h = \phi_u\phi_p\phi_s$. Llavors hom té un model de l'aplicació de retorn que es pot analitzar per descobrir les propietats de la dinàmica global a un entorn de h i la seva variació en variar els paràmetres. Així, es poden estudiar bifurcacions associades a una tangència homoclínica: creacions i destruccions d'infinites òrbites periòdiques, la seva estabilitat, etc.

El problema esdevé molt més difícil si hom pretén tenir un model d'aplicació de retorn que *capturi tota la dinàmica rellevant*. Per a això ens cal parlar de *dominis fonamentals* (en un sentit global). Seguint amb la línia simplista de considerar aplicacions en el pla, considerem una varietat inestable d'un punt hiperbòlic p. Sigui $\mathcal{R}$ una corba que talla transversalment a la varietat W_p^u (vegeu la figura 18). La imatge per ϕ de $\mathcal{R}$, $\phi(\mathcal{R})$ és una nova corba també transversal a W_p^u. Siguin ara $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dos corbes addicionals (en cert sentit més o menys *paral·leles* a W_p^s). Suposem, finalment, que tot punt en la regió $\mathcal{DF}$ limitada per les quatre corbes descrites, torna a entrar en la dita regió per un iterat convenient de ϕ. Naturalment, el nombre d'iteracions que cal per tornar a $\mathcal{DF}$ depèn del punt escollit dins de $\mathcal{DF}$.

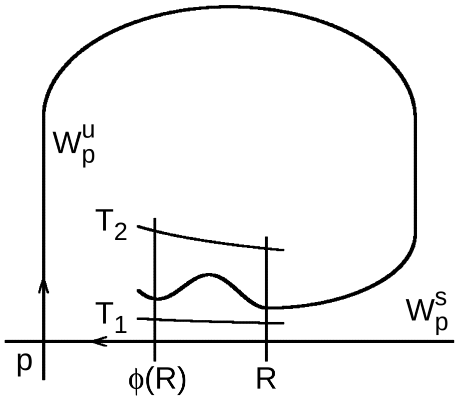


Figura 18

D'aquesta manera, *tota* la dinàmica pot ser analitzada estudiant només l'aplicació de retorn, $\mathcal{P}$, a $\mathcal{DF}$. La regió $\mathcal{DF}$ será el *domini fonamental* considerat. El fet important és que, en certes situacions, és possible demostrar que $\mathcal{P}$ té una forma perfectament definida, malgrat l'*aparent complexitat* deguda a la seva definició. Aquesta forma definida pot ser una família d'aplicacions depenent d'uns pocs paràmetres amb l'afegit de petites pertorbacions, independentment de quina sigui la forma concreta del difeomorfisme inicial ϕ. La *forma normal global* serà la *família d'aplicacions depenent d'uns pocs paràmetres*, i l'efecte de quin sigui el difeomorfisme ϕ escollit en concret apareix sols en les petites pertorbacions. Tenim així *un model d'un model*. El seu estudi pot ser suficient per mostrar l'existència d'un cert tipus de comportament, sobre el qual les *petites pertorbacions* produeixen només petits canvis quantitatius.

Aquesta tècnica ha estat emprada en diversos problemes i és una de les línies actives de recerca actual. Un cas ben conegut és el de les *cascades de doblaments de període* (o fenomen de Feigenbaum), que apareix (diríem que *inevitablement*) en molts problemes, sota certes condicions, *independentment* de la forma concreta del model matemàtic del fenomen natural estudiat. Això és el que fa que aquests models rebin el nombre de *models universals*. Sempre que es tingui aquesta situació es podrà preveure un cert tipus de dinàmica, independentment de quin sigui el problema estudiat.

Sobre les dimensions rellevants. Problemes infinit-dimensionals

Molts sistemes tenen una dimensió gran, ja que el nombre de variables és elevat. Pensem, per exemple, en el cas de reaccions químiques amb milers de reactius i productes. Un altre cas que porta de manera natural a sistemes de *dimensió gran* són les *equacions en derivades parcials del tipus d'evolució*. Típicament són equacions de la forma $\frac{d}{dt}u = F(t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$, on la variable u pot tenir diverses components. Anomenem t la variable *temporal* i x, y i z (per exemple) les variables *espacials*. Naturalment podem tenir sistemes on hi hagi diverses variables u, on el nombre de variables espacials sigui diferent de 3, o bé on les derivades respecte t o respecte x, y i z siguin d'ordre 2 o superior. En general s'escriuen aquestes equacions sota la forma compacta $\frac{d}{dt}u = G(t, u)$, on ara G denota un cert operador, en general no lineal, que a un valor de t i a una funció u li associa una altra funció, i en aquesta associació hi intervenen la pròpia funció u i les seves derivades respecte les variables d'espai. Naturalment, si l'equació inicial és autònoma, tindrem sols $G(u)$.

La funció u és de la forma $u(t,x,y,z)$ (és a dir, a cada joc de valors de les variables (t,x,y,z) li associa un valor numèric o vectorial). Però la podem mirar d'una altra manera. Sigui Ω el domini a $\mathbb{R}^3$ on es prenen els punts (x,y,z). Considerem una funció $U : t \to U(t)$, que a cada valor de t li associa una funció, $U(t)$, que pertany a un cert espai de funcions definides a Ω (per exemple $\mathcal{C}^r(\Omega)$ per a un r convenient). Aquest és un espai de dimensió infinita, i l'equació $\frac{d}{dt}u = G(t,u)$ defineix un flux en ell. Aquest flux té lloc, doncs, a un espai *infinit-dimensional*. De manera semblant apareixen equacions com aquestes en problemes *d'equacions amb retard*, per exemple equacions ordinàries de la forma $\frac{d}{dt}x = f(t, x(t), x(t-r))$, on el camp vectorial depèn, no sols de t i del valor de x en el temps actual, $x(t)$, sinó també del valor de x en un temps *retardat*, $x(t-r)$, essent r l'anomenat retard. Llavors les *condicions inicials* per a l'equació consisteixen en els valors a l'interval $[-r,0]$, és a dir, no són valors numèrics sinó una certa funció. A mesura que es mou t la *solució* és una certa funció definida a l'interval $[t-r,t]$. És clar que poden aparèixer diversos retards, o que aquests depenguin de t, de $x(t)$, de t i $x(t)$, etc., donant lloc a equacions més complicades.

En el tractament numèric d'aquestes equacions no es pot treballar amb un nombre infinit de variables: *Hi ha massa variables!* Hom recorre a discretitzacions, projeccions, etc. Però succeeix que molts d'aquests *sistemes infinit-dimensionals* tenen *la major part de les direccions de tipus contractiu* i les dimensions de les varietats inestables dels seus objectes invariants són finites. Resultats d'aquest tipus han estat establerts per a certs casos de les equacions de Navier-Stokes en mecànica de fluids i en d'altres casos. Això fa que el nombre de *dimensions rellevants* sigui finit.

Això es complementa amb el fet que molts fenòmens naturals, quan s'estudia la dimensió dels atractors a partir de dades experimentals, s'obtenen valors d'aquesta dimensió força petits (en problemes de dinàmica de laser valors entre 2 i 3, en problemes de cinètica química fins a 6 o 8, i àdhuc en meteorologia valors fins a 10). És clar que, matemàticament hom pot *prefabricar* sistemes que tinguin atractors de dimensió arbitràriament gran, però sembla que la natura es comporta *molt més decentment*. El mateix succeeix en tot el que fa referència al nombre d'exponents de Lyapunov positius. Normalment, s'observa que sols un petit nombre dels exponents de Lyapunov són positius.

El problema és que, malgrat que es conegui que la dimensió rellevant sigui finita, no hi ha tècniques plenament satisfactòries per fer la reducció a *les direccions adequades*. De tota manera, aquest és un camp de recerca activa per les seves aplicacions i conseqüències. Les anomenades *reducció a la varietat central* i *reducció a la varietat lenta*, han estat implementades per a certs problemes amb resultats notables. Aquest tipus de tècniques s'apliquen, no sols per a la recerca d'atractors estranys en sistemes de moltes variables, sinó també per estudiar la dinàmica en objectes invariants que siguin hiperbòlics. La simulació numèrica directa no dóna resultats satisfactoris, ja que es produeix un escapament en les direccions inestables. Cal usar primer una reducció a la varietat central (diguem) bé directament si el problema és relativament senzill, bé mitjançant manipulació simbòlica fins a un ordre elevat.

Comentaris finals

En les seccions precedents hem presentat una introducció a les causes de la impredictibilitat en sistemes deterministes. El mètode emprat ha estat de caire essencialment geomètric. Els exemples de diverses situacions senzilles poden ajudar a entendre els mecanismes que produeixen la manca de predictibilitat. Els objectes geomètrics introduïts tenen un paper ben marcat i constitueixen les eines bàsiques per a la comprensió dels sistemes deterministes. De la mateixa manera que *homoclínic transversal* implica *impredictibilitat* (llevat de certs casos degenerats, en problemes diferents dels presentats aquí), es pot demostrar, en molts casos, que *impredictibilitat* implica *homoclínic transversal* (potser en un sentit *feble*).

La tasca matemàtica de demostrar rigorosament la majoria dels resultats comentats és lluny de ser trivial, però voldríem animar al lector curiòs a que n'examinés alguns en detall. Naturalment, la presentació feta aquí és absolutament elemental per als experts en sistemes dinàmics, mentre que pot semblar abstracta per a d'altres lectors més acostumats a tasques de tipus descriptiu. Espero que l'esforç fet per entendre les diferents seccions li sigui útil per comprendre els fets experimentals en què treballi. Com a idea clau ha de fer l'abstracció d'intentar associar al fenomen que estudiï l'espai de fases corresponent. Si ho fa així haurà guanyat una bona part en la comprensió del problema.

Cal dir també que hom no pot pretendre que les idees exposades aquí siguin suficients per comprendre fenòmens complexos, especialment si no estem segurs de si el sistema és determinista o bé si, tenint bona evidència del seu caràcter determinista, hom no coneix cap model matemàtic del fenomen que sigui prou fiable. Hi ha sistemes complexos que depenen de paràmetres que, a la seva vegada, varien lentament amb els temps o amb la posició, o bé estan subjectes, ells mateixos, a una certa dinàmica. Llavors és possible que en distints punts de l'espai o en transcórrer els temps, *l'atractor* que es tingui evolucioni d'acord amb l'evolució dels paràmetres. Naturalment, com s'ha dit abans, podem tenir sistemes que presentin diversos atractors simultàniament (àdhuc una infinitat d'atractors periòdics o estranys!). A quin atractor anem a parar depèn de les condicions inicials o, si els paràmetres varien amb el temps, de quina sigui la *història* del sistema.

La descripció geomètrica dels atractors requereix el coneixement de *l'esquelet* del sistema, tal com hem dit, incloent les varietats invariants de diferents objectes. És clar que aquesta descripció pot ser difícil, especialment si calen molts objectes o si la dimensió de l'espai de fases és gran. També depèn del detall que vulguem. Pot ser que, encara que l'esquelet contingui infinits objectes, sigui suficient descriure'ls amb una certa tolerància. És a dir, podem decidir que tot objecte invariant a l'espai de fases que tingui unes dimensions menors de 10^{-3} és irrellevant (o no podem observar-lo) i no cal donar-lo a la llista de candidats a atractor.

Un altre punt a tenir en compte és que, per a la majoria d'atractors estranys, hi ha mesures invariants (si es vol, unes certes distribucions de probabilitats) associades a ells. *Encara que tinguem impredictibilitat, els punts a l'espai de fases no es passegen per on volen, sinó que tendeixen a una certa varietat inestable i amb una distribució de probabilitats límit ben definida.* És a dir, tenim una certa *predictibilitat parcial*. Cal fer, però, unes observacions.

- En primer lloc, pot ser que el temps necessari per apropar-se a l'atractor sigui gran i la durada de l'experiment (o l'observació del fenomen) sigui més curta. Llavors estem observant sols el *transitori*. De tota manera l'esquelet des sistema continua essent útil per comprendre la dinàmica (i no sols la dinàmica límit).

- Sovint podem considerar el sistema afectat d'un cert *soroll* que s'afegeix a la component principal de tipus determinista. Si l'atractor determinista és un punt fix o una òrbita periòdica, observarem, en el seu lloc, una certa distribució de probabilitats al voltant d'ells. Si l'atractor determinista és un atractor estrany, observarem una probabilitat distribuïda a un entorn de l'atractor determinista. En certs casos hom a pogut demostrar que, quan la mida del soroll tendeix a zero, la probabilitat tendeix a la que hi ha sobre l'atractor estrany determinista. Això s'aplica també a les simulacions fetes amb ordinador, admetent (la qual cosa no és del tot correcta) que la distribució dels errors d'arrodoniment és aleatòria. Si l'ordinador té uns errors d'arrodoniment petits (típicament errors relatius de l'ordre de 10^{-16}) pot ser que la seva influència en la forma de l'atractor sigui menor que la mida mínima d'un punt representable a la pantalla de l'ordinador (és a dir, que estigui per sota la mida d'un *pixel*), i aquests errors no afectin l'atractor del model matemàtic que s'observa en la simulació numèrica.

- El soroll pot provocar que l'atractor observat sigui diferent del que hi ha en el cas determinista, encara que es tracti d'un soroll petit. Per exemple, podem tenir un sistema que mostri un atractor periòdic de període gran i tal que en variar una mica el paràmetre es tingui un atractor estrany. O bé, en general, que estem prop d'una tangència homoclínica que ens faci passar d'un atractor a un altre. El soroll pot fer que els punts *creuin* la petita distància que hi ha d'una varietat a l'altra encara que no tinguem contacte entre elles. En tot cas, consideracions geomètriques elementals poden ajudar a donar una explicació *raonable* de la fenomenologia observada.

Bibliografia

Un recull d'exemples i comentaris sobre diversos problemes pot trobar-se en el número 115 (juliol-agost 1991) de la revista *Mundo Científico*. La revista *Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering* conté molts articles d'aplicacions a distintes àrees de la ciència i la tecnologia, i també articles de recerca bàsica. El número 3 del volum 3 (juny 1993) està dedicat a diferents maneres de mesurar el comportament impredictible i a tests de determinisme. Per a un recull de mètodes per calcular varietats invariants i punts homoclínics en sistemes de dimensió baixa, vegeu l'article de l'autor "On the Analytical and Numerical Approximation of Invariant Manifolds" a *Les métodes modernes de la mécanique céleste*, 285, ed. D. Benest, C. Froeschlé, Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1989.

Alguns llibres bàsics són:

1. Arnold, V. I.: *Geometric theory of ordinary differential equations*, Springer 1982.

   Conté una bona introducció a les equacions diferencials ordinàries, amb especial èmfasi en els aspectes geomètrics. És convenient que el lector tingui alguns coneixements previs d'aquest tema.

2. Arnold, V. I. et al.: *Dynamical Systems I,II,III,IV i V*, Springer 1985-1988.

Formen part d'una Enciclopèdia de les Ciències Matemàtiques. Bàsicament presenta resultats i metodologia que cobreixen la major part de temes en Sistemes Dinàmics. Útil com a referència.

3. Arnold, V. I., Avez, A.: *Ergodic problems of classical mechanics*, Benjamin 1968.

   Dedicat essencialment als sistemes conservatius, conté tant la descripció dels moviments regulars (o integrables) com la dels no predictibles, incloent també l'estudi dels sistemes ergòdics. Fou una fita important en la popularització del teorema KAM.

4. Collet, P., Eckmann, J. P.: *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, 1980.

   Dedicat a sistemes discrets en dimensió 1, s'inicia de forma motivadora i didàctica, per anar fins als darrers resultats a l'època de publicació.

5. Guckenheimer, J., Holmes, P.: *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Applied Math. Sci. 42, Springer 1983.

   Té una presentació molt didàctica i motivadora. Recomanable com una primera aproximació a molts temes de sistemes dinàmics continus. Presenta en detall nombrosos exemples.

6. Iooss, J.: *Bifurcation of maps and applications*, North Holland 1979.

7. Iooss, J.: *Elementary stability and bifurcation theory*, Springer 1990.

   Els dos darrers llibres constitueixen una bona referència introductòria a la major part dels temes en el camp de les bifurcacions. Hi ha diverses aplicacions a problemes concrets.

8. Mira, C.: *Chaotic Dynamics*, World Scientific, 1987.

   Escrit d'una manera més *heurística* que *analítica*, conté la descripció de la dinàmica de diversos sistemes. En molts problemes les descripcions presentades, encara que no del tot rigoroses han estat peoneres.

9. Palis, J., de Melo, W.: *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*, Springer 1982.

   Recomanable com una bona introducció als sistemes dinàmics des del punt de vista geomètric. Útil per familiaritzar-se amb la terminologia bàsica.

10. Palis, J., Takens, F.: *Hiperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge Univ. Press 1993.

    Essencialment dedicat als fenòmens homoclínics i a les seves bifurcacions. Molt útil per comprendre els mecanismes de creació d'atractors estranys.

11. Wiggins, S.: *Global bifurcations and chaos*, Applied Math. Sci. 73 Springer 1988.

    Discuteix de forma bastant completa diverses famílies genèriques de sistemes, fent l'anàlisi de les bifurcacions en detall. Els resultats presentats són immediatament aplicables a molts dels sistemes que apareixen en models *senzills*.