Sobre los puntos Lagrangianos del sistema Sol-Júpiter

Frederic Gabern[1] Àngel Jorba[1]

Resumen

Nuestro objetivo es desarrollar y estudiar un par de modelos para la dinámica de una partícula situada cerca de los puntos Lagrangianos del sistema Sol-Júpiter. En un primer modelo, se revisa, desde un punto de vista particular, el problema espacial restringido elíptico de los tres cuerpos (ESRTBP). En un segundo modelo, se trata de incluir el efecto de Saturno, tanto sobre la partícula como sobre Júpiter. Para ello se ha calculado una solución periódica del problema plano de tres cuerpos Sol-Júpiter-Saturno cercana al movimiento real. Luego, se han escrito las ecuaciones de movimiento para una partícula infinitesimal que se desplaza bajo el efecto gravitatorio de esos tres cuerpos. Usando coordenadas adecuadas, cada modelo puede escribirse como una perturbación periódica del RTBP. Posteriormente, se han realizado algunas comparaciones de órbitas de asteroides Troyanos en estos modelos con las del Sistema Solar real. Finalmente, se han reducido los dos Hamiltonianos a forma normal en una zona cercana a los puntos triangulares y se ha descrito brevemente la dinámica alrededor de ellos.

Introducción

En el año 1906, Max Wolf descubrió el primer asteroide (llamado 588-Aquiles) de la familia de los asteroides Troyanos. Esta familia está formada por dos grupos de asteroides que siguen aproximadamente la órbita de Júpiter alrededor del Sol, sesenta grados por delante de Júpiter, uno de ellos y, sesenta grados por detrás, el otro.

Uno de los modelos más sencillos para el estudio del movimiento de una partícula en el sistema Sol-Júpiter es el Problema Restringido de los Tres Cuerpos (a partir de ahora, RTBP). EL RTBP describe el movimiento de una partícula sin masa bajo la influencia del Sol y de Júpiter, suponiendo que estos dos cuerpos se mueven en órbita circular. Situándonos en un sistema de referencia giratorio con origen el centro de masas (sistema sinódico), aparecen cinco puntos de equilibrio para el movimiento de la partícula: tres de ellos sobre el eje x (conocidos como $L_{1,2,3}$ o puntos de Euler) y dos formando un triangulo equilatero en el plano x-y con el Sol y Júpiter (conocidos como $L_{4,5}$ o puntos de Lagrange). Para más detalles, consultar [7]. Las órbitas de los asteroides Troyanos parecen estar en una zona cercana a estos puntos de equilibrio de Lagrange.

Nos parece, pues, interesante estudiar modelos un poco más complejos que el RTBP, incluyendo aspectos que nos intenten acercar a la realidad. Para ello, hemos usado dos modelos que añaden una perturbación periódica al RTBP. En el primero de ellos, suponemos que la órbita relativa de Júpiter respecto al Sol ya no es circular sino elíptica. En el segundo, añadimos Saturno al sistema Sol-Júpiter encontrando una solución periódica para este Problema de Tres Cuerpos (TBP, a partir de ahora).

Una vez escritos convenientemente estos dos modelos, los usamos para generar simulaciones numéricas de órbitas de algunos asteroides Troyanos. Comparamos estas órbitas con las que se obtienen para el modelo base, RTBP, y con uno de los mejores modelos para la dinámica del Sistema Solar, la efemérides JPL [6].

En la última sección, se estudia la dinámica de ambos modelos mediante cálculos de formas normales de los hamiltonianos.

Deducción de dos modelos periódicos

En este apartado, reconstruiremos dos modelos del sistema Sol-Júpiter que pueden verse como dos perturbaciones periódicas distintas del RTBP. En el primer modelo, estudiamos desde un punto de vista particular el Problema Espacial Restringido Elíptico de Tres Cuerpos (a partir de ahora, ESRTBP) y en el segundo, incluimos el efecto de Saturno al problema restringido circular, obteniendo un modelo restringido de cuatro cuerpos que llamaremos Problema Bicircular Coherente (BCCP, a partir de ahora).

El Problema Restringido Elíptico de Tres Cuerpos

El modelo ESRTBP es un modelo ya clásico dentro del mundo de la mecánica celeste. Podemos, por ejemplo, ver una descripcion en [7] y un estudio de la dinámica no lineal alrededor de los puntos triangulares en [5].

Sin embargo, el ESRTBP clásico no usa como variable independiente el tiempo, cosa que sí hacemos con otros modelos como el RTBP y el BCCP. Por lo tanto, nos parece apropiado recalcular el modelo usando el tiempo como variable independiente.

Solución elíptica del problema de dos cuerpos

Consideramos una solución elíptica del problema de dos cuerpos Sol-Júpiter vista desde un sistema de referencia inercial con origen el centro de masas. Si escogemos la unidad de masa tal que la suma de masas de los dos cuerpos sea uno y la unidad de tiempo tal que el período de la órbita periódica sea 2π, entonces puede verse fácilmente (usando la tercera ley de Kepler) que la distancia entre el Sol y el perihelio de la órbita de Júpiter es 1 (esta será nuestra unidad de distancia). Usando estas unidades y suponiendo que la órbita elíptica está en el plano x-y, esta puede ser descrita por $\vec{r}$, un vector que apunta a Júpiter desde el Sol,

$$\vec{r} \;=\; \frac{1-e^2}{1+e\cos v}(\cos v, \sin v, 0) \qquad (1)$$

donde e es la excentricidad de la órbita y v la anomalía verdadera (angulo medido en la dirección en que la órbita es descrita, empezando por el perihelio).

La evolución de la anomalía verdadera en función del tiempo viene dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(1+e\cos v)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

En el modelo ESRTBP se describe el movimiento de una tercera partícula que se mueve bajo la atracción del Sol y Júpiter, suponiendo que estos dos cuerpos siguen la órbita elíptica.

En el modelo clásico se usa la anomalía verdadera como variable independiente. La relación entre el tiempo y la anomalía verdadera (2) es claramente no lineal. A continuación, desarrollaremos un modelo de tres cuerpos restringido elíptico que tenga como variable independiente el tiempo.

El hamiltoniano del ESRTBP

Suponiendo que el Sol y Júpiter se mueven en la solución elíptica del problema de dos cuerpos, es fácil deducir el hamiltoniano de una partícula sin masa que se mueve bajo la influencia de los dos primeros. Si hacemos un cambio de variables a un sistema giratorio y pulsante que fije las posiciones del Sol y Júpiter en $(\mu, 0, 0)$ y $(\mu - 1, 0, 0)$ respectivamente, podemos escribir este hamiltoniano de tal forma que tenga el tiempo como variable independiente y sea una perturbación periódica del RTBP:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\alpha_1(t)(p_x^2+p_y^2+p_z^2) + \alpha_2(t)(xp_x+yp_y+zp_z) \\ &\quad +\alpha_3(t)(yp_x - xp_y) - \alpha_4(t)\left[\frac{1-\mu}{q_S} + \frac{\mu}{q_J}\right], \end{aligned} \qquad (3)$$

donde $q_S^2 = (x-\mu)^2 + y^2 + z^2$ y $q_J^2 = (x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2$. Los coeficientes de Fourier de las funciones 2π-periódicas

$$\alpha_j(t) = \sum_{k\geq 0} \alpha_{jk}\cos(kt), \quad j = 1,3,4\ ; \qquad \alpha_2(t) = \sum_{k\geq 1} \alpha_{2k}\sin(kt),$$

pueden calcularse, hasta cierto orden (se han despreciado los coeficientes de módulo menor a 10^{-15}), de forma sencilla a partir de una tabulación numérica de $\vec{r}$ (fácilmente obtenible de (1) y (2)) en el intervalo de tiempo $(0, 2\pi)$.

El modelo Bicircular Coherente

Un modelo Bicircular Coherente para el sistema Tierra-Luna-Sol ya fue construido en [1]. El primer paso consiste en obtener una solución periódica del problema plano de tres cuerpos Sol-Júpiter-Saturno lo más cercana posible a la realidad. Luego, usaremos esta solución para escribir las ecuaciones del modelo como una perturbación periódica del RTBP. Para una deducción más detallada del modelo ver [3].

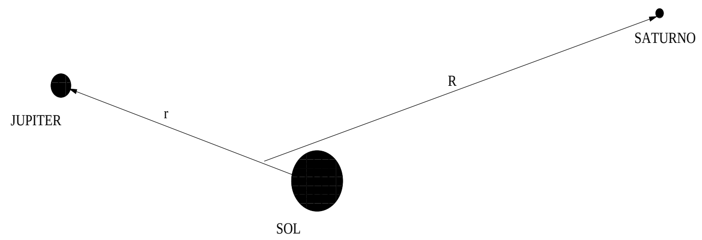

Figura 1: Coordenadas de Jacobi para el problema de los tres cuerpos.

Cálculo de una solución periódica del TBP.

Nuestro objetivo es calcular numéricamente una solución periódica del TBP plano. Para ello usaremos la formulación de Jacobi del TBP, en donde se ha hecho uso de las integrales del centro de masas y se ha reducido el problema a cuatro grados de libertad. Las coordenadas de posición vienen dadas por dos vectores, uno que va del Sol a Júpiter y otro del baricentro de Sol-Júpiter hasta Saturno pasando por el centro de masas global (ver Figura 1).

Las unidades que usaremos son las usuales del RTBP: la constante gravitatoria igual a 1, la de masa tal que la suma de la masa del Sol y Júpiter sea también 1. Si nos situamos en un sistema de referencia giratorio en sentido contrario al de las agujas del reloj con frecuencia 1 (la frecuencia de Júpiter en el RTBP) y con origen el centro de masas, el movimiento viene dado por el siguiente hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\mu(1-\mu)}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1+m_{sat}}{2m_{sat}}(P_x^2+P_y^2)+(r_yp_x-r_xp_y) \\ &\quad +(R_yP_x-R_xP_y)-\frac{\mu(1-\mu)}{r}-\frac{(1-\mu)m_{sat}}{r_{Ssat}}-\frac{\mu m_{sat}}{r_{Jsat}} \end{aligned}$$

donde $r^2=r_x^2+r_y^2$, $r_{Ssat}^2=(R_x+\mu r_x)^2+(R_y+\mu r_y)^2$ y $r_{Jsat}^2=(R_x-(1-\mu)r_x)^2+(R_y-(1-\mu)r_y)^2$. El valor de los parámetros de masa es $\mu=0.95387536\times10^{-3}$ y $m_{sat}=0.285515017438987\times10^{-3}$.

Mediante un método de Newton, buscaremos una condición inicial para estas ecuaciones tal que los vectores $\vec{r}$, $\vec{R}$ y sus derivadas sean periódicos de período T. El valor de T tiene que ser seleccionado de forma apropiada para obtener una solución lo mas cercana posible al movimiento real de Sol, Júpiter y Saturno. Para ello, T será el valor del período de Saturno en coordenadas del RTBP para el sistema Sol-Júpiter. La frecuencia asociada $\omega_{sat}=\frac{2\pi}{T}$ es 0.597039074021947.

El hamiltoniano del modelo BCCP

Suponiendo que el Sol, Júpiter y Saturno se mueven en la órbita periódica que acabamos de encontrar, podemos deducir el hamiltoniano que rige el movimiento de una partícula sin masa que es atraída por los tres primarios. Es fácil, además, escribir este modelo como una perturbación del RTBP.

Para ello, hacemos un cambio de coordenadas de un sistema de referencia inercial con origen el centro de masas de Sol-Júpiter-Saturno a otro giratorio y pulsante centrado en el baricentro de Sol-Júpiter donde las posiciones de estos dos cuerpos se mantienen fijas en los puntos $(\mu, 0, 0)$ y $(\mu - 1, 0, 0)$, respectivamente (para ver los detalles, consultar [3]).

Finalmente, en este sistema de referencia podemos definir unas variables (p_x, p_y, p_z) tales que el movimiento de la partícula viene dado por el siguiente hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\alpha_1(t)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \alpha_2(t)(xp_x + yp_y + zp_z) + \alpha_3(t)(yp_x - xp_y) \\ &\quad + \alpha_4(t)x + \alpha_5(t)y - \alpha_6(t)\left[\frac{1-\mu}{q_S} + \frac{\mu}{q_J} + \frac{m_{sat}}{q_{sat}}\right], \end{aligned} \tag{4}$$

donde $q_S^2 = (x-\mu)^2+y^2+z^2$, $q_J^2 = (x-\mu+1)^2+y^2+z^2$, $q_{sat}^2 = (x-\alpha_7(t))^2+(y-\alpha_8(t))^2+z^2$ y

$$\alpha_j(t) = \sum_{k\geq 0} \alpha_{jk}\cos(k\omega_{sat}t), \;\; j = 1,3,4,6,7\,; \qquad \alpha_j(t) = \sum_{k\geq 1} \alpha_{jk}\sin(k\omega_{sat}t), \;\; j = 2,5,8.$$

Los coeficientes α_{jk} se han calculado numéricamente mediante análisis de Fourier, despreciando los de módulo menor que 10^{-13}.

Simulaciones numéricas

En esta sección se incluyen varias simulaciones numéricas para los dos modelos periódicos descritos en el apartado anterior y las comparamos con integraciones del problema base, el RTBP, y con el modelo JPL del Sistema Solar real.

Asteroides Troyanos

Para comparar los dos modelos periódicos (3) y (4) con el modelo JPL, se han hecho integraciones numéricas de varios asteroides Troyanos. Se han tomado condiciones iniciales a fecha de 22 de diciembre de 2000 de la base de datos [2] y se han integrado por un período de 20 años. El resultado para el asteroide 588-Aquiles puede observarse en la Figura 2.

Como ya se ha mencionado anteriormente, los modelos BCCP y ESRTBP incluyen dos perturbaciones (periódicas) distintas del RTBP. Con ellos intentamos que el movimiento de Júpiter se acerque un poco más a la realidad, añadiendo el efecto de Saturno, en el BCCP, o forzando que Júpiter orbite en una elipse de excentricidad igual a la (instantanea) “real”, en el ESRTBP.

En el caso del ESRTBP, el movimiento de Júpiter está más alejado del RTBP que el BCCP ya que la perturbación es mayor. Esto produce que, en ciertos momentos, la órbita del asteroide en el ESRTBP esté más cerca de la real que la del BCCP y, en otros momentos, más alejada ya que, como es bien sabido, el movimiento real de Júpiter es cercano a una elipse que gira y no al de una elipse fija.

En ambos casos, nos encontramos en que el movimiento de Júpiter no es lo suficientemente cercano al real. Esto se debe a que hemos escogido movimientos demasiado sencillos, aunque nos parecen una buena elección como primer paso. Para mejorar el

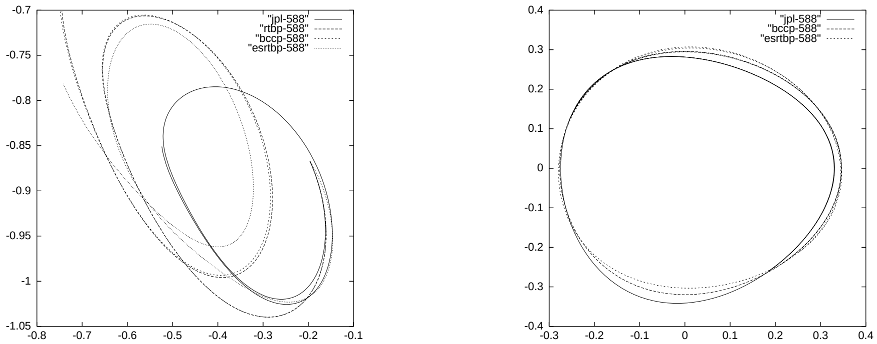

Figura 2: Proyecciones (x, y) y $(z, \dot{z})$ de la órbita del asteroide 588-Aquiles para los modelos JPL, BCCP y ESRTBP, durante 20 años.

resultado tendríamos que intentar modelar mejor el movimiento de Júpiter, por ejemplo buscando soluciones cuasi-periódicas del TBP que incluyeran alguna frecuencia (relevante) más.

Finalmente, nos gustaría comentar la simplicidad de los gráficos para la proyección $(z, \dot{z})$ del movimiento, parecidos al retrato de fase de un oscilador armónico. Esto puede explicarse estudiando la forma normal alrededor de los puntos lagrangianos en la dirección $(z, \dot{z})$ de cualquiera de los tres modelos: RTBP, BCCP y ESRTBP.

Forma Normal

Para realizar un estudio local de los puntos lagrangianos $L_{4,5}$ es conveniente reducir los hamiltonianos (3) y (4) a forma normal. Las técnicas usadas pueden consultarse más detalladamente en [3] y [5].

Debido a las simetrías de (3) y (4), es suficiente centrar el estudio local en un solo punto triangular, por ejemplo L_5. Es fácil ver que este punto fijo del RTBP se transforma en órbita periódica (en el espacio de fases) para los modelos ESRTBP y BCCP. Dichas órbitas periódicas tienen una dinámica lineal normal totalmente elíptica y nos disponemos a expandir los hamiltonianos para ver qué sucede a órdenes superiores.

Para ello, hacemos una translación (dependiente periódicamente del tiempo) para situarnos en un sistema de referencia donde estas órbitas periódicas sean puntos fijos. Luego, hacemos un cambio lineal (usando el Teorema de Floquet) que nos elimina la dependencia temporal y nos diagonaliza el término de orden dos de los hamiltonianos dejándolos en la forma genérica $H_2 = i \sum_{j=1}^{3} \omega_j q_j p_j$, donde $i = \sqrt{-1}$. Los valores numéricos de las frecuencias son:

	ESRTBP	BCCP
ω_1	-0.08080364304385	-0.08047340341466
ω_2	0.99675885471089	0.99668687782956
ω_3	1.0	1.00006744139040

Posteriormente, adaptando la recurrencia de los polinomios de Legendre a nuestro caso, expandimos los hamiltonianos en potencias de las variables (q, p) y en series de Fourier respecto al tiempo.

1	0	0	-8.0473403414658348e-02
0	1	0	9.9668687782955701e-01
0	0	1	1.0000674413904136e+00
2	0	0	5.6007414394589805e-01
1	1	0	-1.5540007094294600e-01

0	2	0	5.5094910495712413e-03
1	0	1	5.4161643846023226e-02
0	1	1	6.6064951514490360e-03
0	0	2	-3.4086514191576233e-04

Tabla 1: Coeficientes de la forma normal para el BCCP hasta grado 2 en las acciones. Las tres primeras columnas de cada bloque contienen los exponentes de las acciones $I_{1,2,3}$ y la cuarta columna el valor del coeficiente.

ω_1	-8.0803643043855636e-02	c	-2.1553181184676487e-04
ω_2	9.9675885471089010e-01	d	5.8004534402251035e-03
$\alpha_{1,1}$	5.8484519701809745e-01	e	-1.2048847340499595e-05
$\alpha_{1,2}$	-1.5529520931135821e-01	f	7.7290056410439945e-06
$\alpha_{2,2}$	5.6485205021129178e-03	g	-1.7896972086516028e-04
a	5.4452703310267969e-02	h	4.1961077661394758e-07
b	2.3242830996417219e-05	j	-1.2295791857182469e-10

Tabla 2: Coeficientes de la forma normal para el ESRTBP hasta grado 2 en las acciones. Las dos primeras columnas de cada bloque muestran el coeficiente y las segundas su valor numérico.

Finalmente, usando el método de las series de Lie (tal y como está descrito en [4], y con las modificaciones adecuadas para el caso dependiente periódicamente del tiempo), se reducen los hamiltonianos (3) y (4) a forma normal hasta orden 16.

En el caso del BCCP, se ha eliminado completamente la dependencia temporal, con lo que se obtiene un hamiltoniano integrable: $\mathcal{N} = \mathcal{N}(q_1p_1, q_2p_2, q_3p_3)$. En la Tabla 1 se muestran los coeficientes hasta orden 2 en las acciones $I_j = q_jp_j$, $(j = 1, 2, 3)$.

En el caso del ESRTBP, no es posible eliminar la dependencia temporal en los órdenes pares del hamiltoniano debido a la resonancia 1:1 entre la frecuencia propia del sistema Sol-Júpiter y el modo vertical ω_3. Definiendo unas variables acción-angulo adecuadas (ver [5]), el hamiltoniano toma la forma:

$$\begin{aligned} H \quad = \quad & J_0 + \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \alpha_{1,1} J_1^2 + \alpha_{1,2} J_1 J_2 + \alpha_{2,2} J_2^2 + \\ & J_3[aJ_1 + dJ_2 + (bJ_1 + eJ_2)\cos(2\theta_3) + (cJ_1 + fJ_2)\sin(2\theta_3)] + \\ & J_3^2[g + h\cos(2\theta_3) + j\cos(4\theta_3)] + O_3(J_1, J_2, J_3) \end{aligned}$$

Los coeficientes pueden verse en la Tabla 2.

Dinámica no-lineal

Las formas normales que acabamos de encontrar nos permiten hacer una pequeña descripción de la dinámica alrededor de los puntos triangulares.

En el modelo BCCP, como el hamiltoniano (truncado) en forma normal es completamente integrable y la perturbación que hemos despreciado (de orden 17) es pequeña, la teoria KAM (teorema KAM y sus adaptaciones para los casos de dimensión baja) nos muestra que alrededor de la órbita periódica que sustituye a los puntos triangulares del RTBP tenemos órbitas cuasiperiódicas en toros de 2, 3 y 4 dimensiones.

En el caso del ESRTBP, al no ser la forma normal (truncada) completamente integrable, no tenemos el espacio alrededor de los puntos fijos (en las coordenadas de forma normal) completamente foliado por una familia de toros triparamétrica. Sin embargo, al ser I_1 y I_2 integrales primeras, si las fijamos constantes, en el espacio de fases (I_3, θ_3), encontramos puntos fijos elípticos y hiperbólicos. En particular, alrededor de la órbita periódica existen toros normalmente hiperbólicos.

Nos interesaria profundizar un poco más en el estudio del entorno de los puntos de lagrange. Para ello, se podrian usar otras técnicas, como por ejemplo el cálculo de integrales primeras aproximadas. Para un estudio detallado de esto en el modelo BCCP, ver [3]. En el caso del ESRTBP, se trata de trabajo actual.

Referencias

[1] M.A. Andreu. *The quasi-bicircular problem.* PhD thesis, Univ. Barcelona, 1998.

[2] E. Bowell. The asteroid orbital elements database. Para más información, visitar la URL `http://www.naic.edu/~nolan/astorb.html`.

[3] F. Gabern and À. Jorba. A restricted four-body model for the dynamics near the Lagrangian points of the Sun-Jupiter system. Discrete and Continuous dynamical systems - series B. Volume 1, Number 2, pp 143-182. May 2001.

[4] À. Jorba. A methodology for the numerical computation of normal forms, centre manifolds and first integrals of Hamiltonian systems. *Exp. Math.*, 8(2):155–195, 1999.

[5] À. Jorba and C. Simó. Effective stability for periodically perturbed Hamiltonian systems. In J. Seimenis, editor, *Hamiltonian Mechanics: Integrability and Chaotic Behaviour*, volume 331 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys.*, pages 245–252. Held in Toruń, Polland, 28 June–2 July 1993. Plenum, New York, 1994.

[6] `http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.html`.

[7] V. Szebehely. *Theory of Orbits.* Academic Press, 1967.

1 Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. Universitat de Barcelona. Gran Via 585, 08007 Barcelona. E-mails: `gabern@mat.ub.es, angel@maia.ub.es`