Estudio de la estabilidad de una familia de toros 2D del Problema Cuasibicircular

M.A. Andreu[1] C.Simó[1]

Resumen

El Problema Cuasibicircular viene descrito por un sistema Hamiltoniano de tres grados de libertad y que además depende periódicamente del tiempo. Estudiamos la estabilidad de la familia plana de Lyapunov de toros 2D alrededor del punto de libración L_2. Se observa que el cambio de estabilidad está asociado al nacimiento de las familias de toros Halo 2D. Para este trabajo se han utilizado dos métodos generales para el cálculo de toros invariantes así como un método de interpolación para calcular iterados que den los exponentes de Lyapunov.

El Problema Cuasibicircular

El Problema Cuasibicircular (QBCP) es un problema de cuatro cuerpos en el que tres primarios P_1, P_2, P_3, se mueven en órbitas satisfaciendo la ley de Newton y si $P_{2,3}, P_{1,2,3}$ son los centros de masas obvios, P_2 y P_3 alrededor de $P_{2,3}$, y P_1 y $P_{2,3}$ alrededor de $P_{1,2,3}$, se mueven cerca de círculos. El cuarto cuerpo tiene una masa suficientemente pequeña como para no influir en el movimiento de los tres primarios. El caso considerado aquí corresponde a Sol, Tierra, Luna y nave espacial. El movimiento de esta última está gobernado por un Hamiltoniano con tres grados de libertad que depende periódicamente del tiempo. Denotamos por ω_s la frecuencia y $T = 2\pi/\omega_s$ el período correspondiente, que es el período sinódico del Sol respecto al sistema Tierra-Luna. Este modelo se ha mostrado útil para el estudio del entorno del punto de libración translunar (L_2) del sistema Tierra-Luna dentro del sistema Solar [2].

El QBCP depende de μ, el parámetro de masas del sistema Tierra-Luna, a_s, la distancia media del Sol al baricentro Tierra-Luna y m_s, la masa del Sol. La frecuencia ω_s depende de los anteriores. Los valores utilizados para estos parámetros son:

$$\mu = 0.0121505816\,, \qquad a_s = 388.81114\,,$$
$$m_s = (1-\omega_s)^2\, a_s^3 - 1 \simeq 328900.54\,, \qquad \omega_s = 0.925195985520347\,,$$

tomando las unidades de masa, distancia y tiempo de forma que la masa del sistema Tierra-Luna, su distancia media y su movimiento medio sean iguales a la unidad. En este caso, también la constante de gravitación es igual a la unidad.

Usando un sistema de coordenadas sinódico (giratorio y pulsante) podemos situar la Tierra y la Luna en los puntos fijos $(\mu, 0, 0)$ y $(\mu - 1, 0, 0)$. En este sistema, el Sol gira alrededor del sistema Tierra-Luna en una órbita periódica próxima a circular de radio a_s. Entonces, el Hamiltoniano del QBCP es:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\alpha_1(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\alpha_2(p_x x+p_y y+p_z z)+\alpha_3(p_x y-p_y x)+ \\ &\quad +\alpha_4 x+\alpha_5 y-\alpha_6\left(\frac{1-\mu}{q_{pe}}+\frac{\mu}{q_{pm}}+\frac{m_s}{q_{ps}}\right) , \end{aligned}$$

donde

$$q_{pe}^2=(x-\mu)^2+y^2+z^2 , \qquad q_{pm}^2=(x-\mu+1)^2+y^2+z^2 ,$$
$$q_{ps}^2=(x-\alpha_7)^2+(y-\alpha_8)^2+z^2 ,$$

y α_k son funciones T-periódicas de la forma:

$$\begin{aligned} \alpha_k(t) &= \alpha_{k0}+\sum_{j\geq 1}\alpha_{kj}\cos(j\omega_s t) , \qquad k=1,3,4,6,7, \\ \alpha_k(t) &= \sum_{j\geq 1}\alpha_{kj}\sin(j\omega_s t) , \qquad k=2,5,8. \end{aligned}$$

Véase [2] para una relación de los coeficientes usados en este trabajo.

Primer método para el cálculo de toros invariantes

Vamos a presentar un método para el cálculo de toros invariantes conocido como refinamiento analítico (ver [2] y [1]). Consideramos un sistema

$$\dot{x}+f(t,x)=0 , \qquad x\in\mathbb{R}^n , \tag{1}$$

siendo f analítica en un cierto dominio y T-periódica en t, con $T=2\pi/\omega_s$. Dada una frecuencia ω_p, el objectivo es encontrar una solución de la forma

$$x=\sum_{k\in Z^2} x_k\gamma_1^{k_1}\gamma_2^{k_2} , \tag{2}$$

donde $x_k\in\mathbb{C}^n$, $x_k=\overline{x_{-k}}$, k es el multiíndice (k_1,k_2) y

$$\gamma_1=\exp(i(\omega_p t+\theta_0)) , \qquad \gamma_2=\exp(i\omega_s t) . \tag{3}$$

La fase θ_0 es arbitraria. Si (1) presenta alguna simetría, entonces las componentes de x_k pueden ser simplemente reales o imaginarios puros.

Sea $\mathcal{F}$ el espacio de las series de Fourier reales con dos frecuencias básicas ω_p y ω_s. Las ecuaciones (1) permiten definir una función

$$F:\mathcal{F}^n\longrightarrow\mathcal{F}^n .$$

Así, el problema se reduce a resolver un sistema no lineal de ecuaciones $F(X)=0$, donde $X=\{x_k\}$, son los coeficientes de Fourier de de (2). Hay que hacer hincapié en el hecho de que evaluar la función F requiere un gran esfuerzo de manipulación algebraica y para ello es muy eficiente programar un manipulador específico para el problema. Si la función f puede desarrollarse en serie de potencias, únicamente es necesario manipular polinomios. En el caso del QBCP, los términos del potencial se pueden desarrollar usando los polinomios de Legendre, que pueden obtenerse por recurrencia.

Para buscar un cero de $F(X)$ utilizamos el método de Newton:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - DF^{-1}(X^{(j)})F(X^{(j)}) \,. \tag{4}$$

Pero, éste es un sistema de dimensión infinita. Para reducir el problema a dimensión finita hay que escoger las frecuencias más relevantes. Esto se puede hacer de la siguiente forma. Sea $M_j = \|F(X^{(j)})\|_\infty$ y $\kappa \in \mathbb{R}$, $0 < \kappa \ll 1$, por ejemplo, $\kappa = 10^{-5}$. En cada iteración del método de Newton, se seleccionan las frecuencias tales que sus coeficientes en $F(X^{(j)})$ sean mayores que κM_j. El sistema lineal asociado a (4) se resuelve únicamente para las frecuencias seleccionadas.

Otro problema que aparece es escoger la aproximación inicial $X^{(0)}$. En ocasiones, en (1) puede escribirse

$$f_\epsilon(t,x) = f_0(x) + \epsilon(f(t,x) - f_0(x)) \,,$$

de forma que f_0 sea autónoma. Entonces, se puede tratar de continuar las órbitas periódicas del sistema autónomo, las cuales genéricamente darán lugar a toros 2D al añadir la perturbación periódica.

Segundo método para el cálculo de toros invariantes

El método que explicamos en esta sección se debe a À. Jorba ([4] y [7]). La idea es determinar los coeficientes de Fourier de una sección del toro. Generalmente, requiere menos coeficientes que el método anterior y suele ser más eficiente.

Consideremos la aplicación g definida por el flujo de (1) a tiempo T. Queremos hallar una curva invariante $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^n$ con número de rotación dado, ρ. Esto es

$$g(\gamma(\theta)) = \gamma(\theta + 2\pi\rho) \,, \qquad \forall \theta \in [0, 2\pi] \,. \tag{5}$$

La curva γ puede expresarse como

$$\gamma(\theta) = a_0 + \sum_{k\geq 1} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \,, \tag{6}$$

con $a_k, b_k \in \mathbb{R}^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Para determinar γ con una cierta precisión basta hallar los coeficientes de Fourier para todo k menor que un determinado N. Para ello discretizamos (5) para $\theta_j = 2\pi j/(2N+1)$, $j = 0, \ldots, 2N$, obteniendo $(2N+1)n$ ecuaciones que pueden resolverse numéricamente usando el método de Newton. Hay que decir que para que la parametrización de la curva (6) esté unívocamente determinada es necesario añadir una condición adicional, por ejemplo que una de las componentes de $\gamma(0)$ tenga un valor fijado. Para más detalles sobre este método véase [4].

Por último, hay que añadir que en el caso de toros muy inestables, en lugar de una sección del toro pueden usarse diversas secciones $\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}$.

Estabilidad de una familia de toros 2D

En el RTBP, la familia plana de órbitas periódicas de Lyapunov es estable en la dirección z hasta la bifurcación en la que aparecen las Halo. Más allá de esta bifurcación las órbitas de Lyapunov se vuelven inestables en la dirección z. En el QBCP ocurre algo similar, pero vamos a ver que este caso es mucho más rico. Aquí, la familia de Lyapunov es una familia de toros 2D. Cada toro tiene dos frecuencias básicas, la del Sol y la suya propia, que decrece lentamente a medida que aumenta la amplitud de los toros. Mientras que en el caso del RTBP tenemos una familia continua de órbitas periódicas, en el caso del QBCP, se trata de un Cantoriano de toros [6].

Para estudiar la estabilidad de los toros utilizamos los exponentes de Lyapunov. Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x) \ ,$$

con $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $x_0(t)$ una órbita del sistema. Las ecuaciones variacionales asociadas a esa órbita son

$$\dot{A} = D_x f(t, x_0(t))\, A \ , \qquad A(0) = I \ ,$$

donde A es una matriz $n \times n$ y I denota la matriz identidad. Sea $\mu_j(t)$ los (eventualmente complejos) valores propios de $A(t)$ para $j = 1, \dots, n$. Los exponentes de Lyapunov y las frecuencias normales se definen, respectivamente, como

$$\lambda_j = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{\log |\mu_j|}{t} \ , \qquad \omega_j = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{\arg(\mu_j)}{t} \ , \tag{7}$$

siempre que los límites existan. El argumento de μ_j debe ser tomado en la elevación (sin tomar mod 2π). Un exponente de Lyapunov igual a cero corresponde a estabilidad lineal, mientras que un exponente positivo denota inestabilidad. Las frecuencias normales dan información sobre el comportamiento rotatorio del flujo en las proximidades de $x_0(t)$, tanto en el caso estable como en el inestable.

En el caso que estamos estudiando ($z = 0$), sólo estamos interesados en la estabilidad en la dirección z. Así pues, basta integrar las variacionales:

$$\dot{A}_z = B(t, x_0(t)) A_z \ , \qquad A_z(0) = I \ , \tag{8}$$

donde A_z y B son matrices 2×2 y B es T-periódica en t. En este caso los límites (7) existen y hay dos exponentes de Lyapunov, λ_1 y $\lambda_2 = -\lambda_1$, debido al caracter Hamiltoniano. Por el mismo motivo, hay una sola frecuencia, ω_z.

Para estudiar la estabilidad de la familia plana de toros Lyapunov en el QBCP, hemos seguido los siguientes pasos:

1. Dada una cierta x-amplitud, calculamos una aproximación analítica de la correspondiente órbita periódica de Lyapunov del RTBP. Para ello, puede utilizarse Lindstedt-Poincaré [5] o cálculo numérico y análisis de Fourier.

2. Cálculo de una aproximación analítica de un toro Lyapunov del QBCP con el método de refinamiento explicado antes. Como aproximación inicial para el método de Newton se utiliza la órbita del RTBP del apartado anterior. Generalmente, se requieren además, tres pasos de un método de continuación para ir desde el RTBP hasta el QBCP.

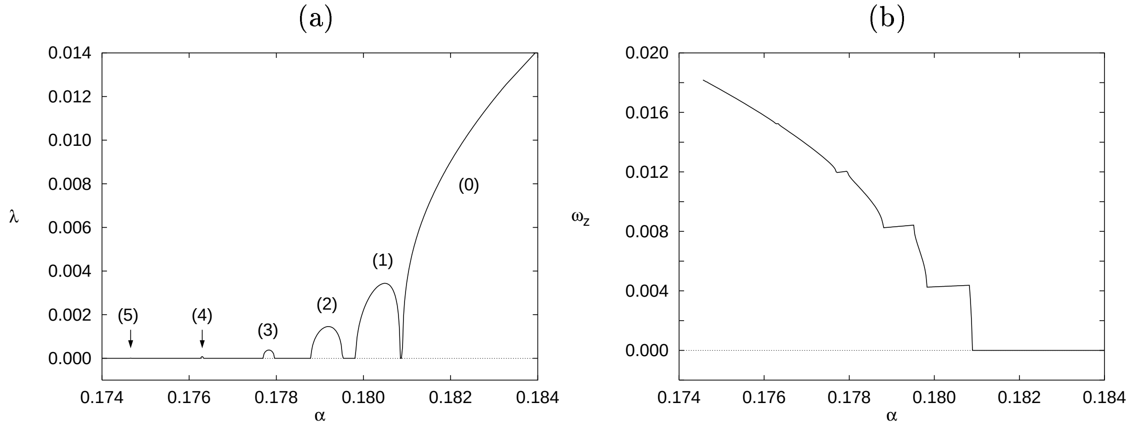

Figura 1: *Estabilidad de la familia plana de toros alrededor de* L_2 *en el QBCP.* α *es la* x*-amplitud del toro. (a) Exponente de Lyapunov* λ*. (b) Frecuencia normal* ω_z*.*

3. Cálculo de los exponentes de Lyapunov. Sea $x_0(t)$ la órbita cuasiperiódica del apartado anterior, expresada como serie de Fourier con dos frecuencias básicas. Para obtener resultados precisos en el cálculo del exponente de Lyapunov, basta utilizar los coeficientes de $x_0(t)$ mayores que 10^{-9}. En el presente caso, hemos usado del orden de 160 términos para cada componente de $x_0(t)$. Entonces, integramos (8) a lo largo de la órbita $x_0(t)$. Para estimar los límites (7), los cocientes se evaluan, típicamente, para valores equiespaciados de tiempo $t = T_p(10^5 + 10^4\,k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, con $T_p = 2\pi/\omega_p$, siendo ω_p la frecuencia propia de la órbita de Lyapunov. El proceso se detiene si tres cocientes consecutivos difieren en menos de cierta tolerancia (típicamente, hemos usado 10^{-7} para el exponente y 10^{-9} para la frecuencia normal). Es importante señalar que se evita la integración de las variacionales para intervalos de tiempo largos, usando un método de interpolación descrito en [3] (véase siguiente sección).

Hemos calculado 401 órbitas de Lyapunov del RTBP con amplitudes equiespaciadas en el intervalo $[0.17, 0.18]$. Para estas órbitas, la frecuencia propia disminuye de 1.84319829 a 1.84074873. Las correspondientes órbitas del QBCP han sido calculadas. Sus amplitudes están en el intervalo $[0.17456011, 0.18426829]$. La fig. 1a muestra el exponente de Lyapunov positivo de estas órbitas. Las zonas de inestabilidad señaladas con (k), $k = 0, \ldots, 5$, corresponden a las resonancias $2\omega_z = k(2\omega_s - \omega_p)$. Por supuesto, hay una infinidad de resonancias, pero con intervalos muy pequeños. Las resonancias para $k = 4, 5$ también han sido señaladas a pesar de que apenas son visibles en la figura. El punto en el que empieza la rama (0) es donde nacen las familias de órbitas Halo cuasiperiódicas. Esto ocurre aproximadamente para una amplitud $\alpha = 0.18089485$ y frecuencia propia $\omega_p = 1.84161851$.

La fig. 1b muestra la frecuencia normal módulo ω_p. La curva que aparece en la figura es un ejemplo de "escalera del diablo". Para cada zona de exponente de Lyapunov positivo tenemos un peldaño. Puesto que hay una infinidad de resonancias, hay también infinitos peldaños. También queremos comentar que cerca del final de los peldaños largos, la curva muestra el comportamiento típico de la función raiz cuadrada [3].

Cálculo de exponentes de Lyapunov

Consideremos una ecuación diferencial matricial $n \times n$ (como (8)) de la forma:

$$\dot{A} = B(\theta_p, \theta_s)\, A\ , \qquad A(0) = I\ , \tag{9}$$

donde B es 2π-periódica en θ_p y θ_s. Estos ángulos son $\theta_p = \theta_{p,0} + \omega_p t$ y $\theta_s = \theta_{s,0} + \omega_s t$, y sea $T_p = 2\pi/\omega_p$. Esta es una ecuación diferencial lineal con coeficientes cuasiperiódicos.

Fijamos la fase $\theta_{p,0} = 0$ y consideramos la aplicación Φ, definida por el flujo de (9) a tiempo el período T_p:

$$\theta_{s,0} \in [0, 2\pi] \ \longrightarrow\ P(\theta_{s,0}) = \Phi(\theta_{p,0} = 0, \theta_{s,0}, I)\ .$$

A partir de esta aplicación, definimos la siguiente sucesión:

$$\begin{pmatrix} M_k \\ \theta_s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\theta_s^{(k-1)})\ M_{k-1} \\ \theta_s^{(k-1)} + \omega_s T_p \pmod{2\pi} \end{pmatrix}\ , \tag{10}$$

con M_0=I y $\theta_s^{(0)} = 0$. Para estudiar los exponentes de Lyapunov del sistema (9), sólo es necesario estimar los valores propios del producto de matrices:

$$M_k = P(\theta_s^{(k-1)}) \cdots P(\theta_s^{(1)})\, P(\theta_s^{(0)})\ ,$$

cuando k tiende a infinito. Asimismo, las frecuencias normales también se pueden estimar a partir de las M_k. En nuestro caso, basta con tomar un vector inicial arbitrario y contar el angulo que gira tras la multiplicación sucesiva por las $P(\theta_s^{(k)})$.

Puesto que P es 2π-periódica en $\theta_{s,0}$, calculamos $P(\theta_s^{(k)})$ en puntos equidistantes del intervalo $[0, 2\pi]$, integrando (9). Para conocer P en cualquier otro punto usamos interpolación. En nuestro caso, utilizamos 1000 puntos e interpolación polinomial de grado 7. Este es un método extremadamente rápido para el cálculo de M_k. Un ordenador Pentium (233 MHz) requiere 85s para el cómputo de las 1000 matrices iniciales P. Después, sólo 9s para calcular 10^6 iteraciones de (10), obteniendo estimaciones del exponente de Lyapunov y de la frecuencia normal cada 10^4 iteraciones.

Nuevas familias de toros 2D

Utilizando el método de Jorba para el cálculo de toros invariantes se han seguido las diferentes familias de toros 2D bifurcando de la familia plana de Lyapunov de toros 2D. Debido al caracter fuertemente inestable de los toros, se han usado cuatro secciones γ_0, γ_1, γ_2 y γ_3, para cada uno. En cada cambio de estabilidad en la dirección z aparecen dos nuevas familias de toros 2D, simétricas respecto de $z = 0$, caracterizadas por tener frecuencia vertical

$$\omega_z = \frac{2+k}{2}\,\omega_p - k\,\omega_s.$$

Las familias con k impar aparecen duplicando el período de la sección del toro. La fig. 2 muestra las diferentes familias de toros 2D. Hemos representado el número de rotación ($\rho = \omega_p/\omega_s - 2$) y la máxima z de los diversos cortes de la sección γ_0 con $y = 0$. Se observa una típica estructura de rompimiento de simetrías. Las curvas se han trazado como continuas pero corresponden, en realidad, a Cantorianos de dimensión de Hausdorff cercana a 1.

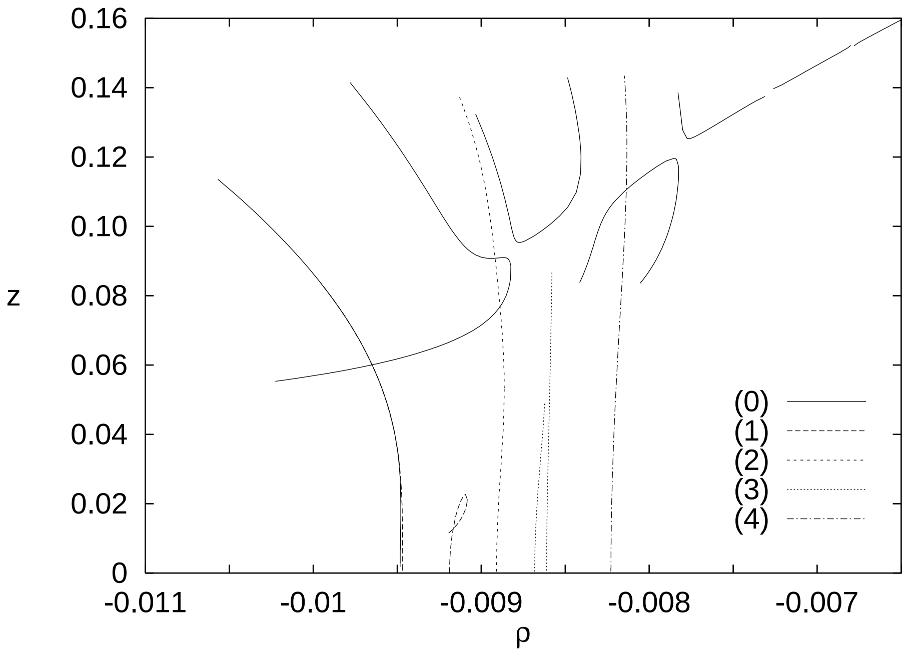

Figura 2: Familias de toros 2D en el QBCP.

Agradecimientos

Los autores agradecen a À. Jorba y E. Castellà los comentarios sobre el segundo método para el càlculo de toros invariantes. M.A. Andreu quiere agradecer al Dept. de Matemàtica Aplicada I (Univ. Politècnica de Catalunya) su hospitalidad y el buen trato recibido. En dicho Dept. realizó parte de este trabajo. C. Simó agradece el soporte de las ayudas DGICYT PB94-215 y CIRIT 1998SGR-42.

Referencias

[1] M.A. Andreu, C. Simó, "Translunar Halo orbits in the Quasi-bicircular Problem", B.A. Steves and A.E. Roy editors, *The Dynamics of Small Bodies in the Solar System*, NATO ASI (1997, Maratea, Italy), pp. 309-314, (1999).

[2] M.A. Andreu, *The Quasi-bicircular Problem*, Tesis, Dept. Matemàtica Aplicada i Anàlisi, Universitat de Barcelona, 1999.

[3] H. Broer, C. Simó, "Hill's equation with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena", *Bol. Soc. Bras. Mat.* **29**, 253-293 (1998).

[4] E. Castella, À. Jorba, "On the vertical families of two-dimensional tori near the triangular points of the Bicircular problem". Preprint (1999).

[5] G. Gómez, J. Llibre, R. Martínez, C. Simó C., *Station keeping of libration point orbits*, ESOC contract 5648/83/D/JS(SC), Final Report (1985).

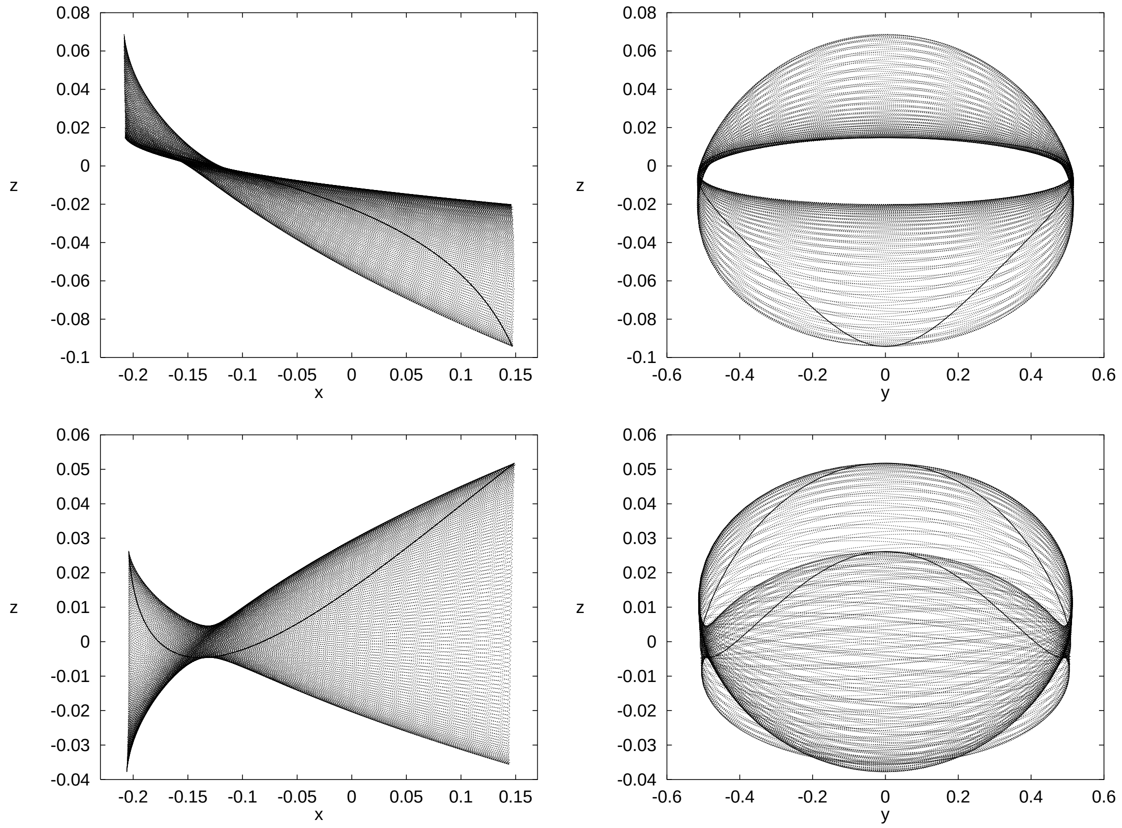

Figura 3: *Ejemplos de toros de las familias (0) y (2) (arriba y abajo, resp.). La sección de los toros ha sido dibujada con linea más gruesa.*

[6] À. Jorba, J. Villanueva, "On the persistence of lower dimensional invariant tori under quasi-periodic perturbations", *Journal of Nonlinear Science*, Vol. 7, pp. 427-473 (1997).

[7] À. Jorba, "On Practical Stability Regions for the Motion of a Small Particle close to the Equilateral Points of the Real Earth-Moon system". Preprint (1999).

[8] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag (1980).

1 Dept. Matemàtica Aplicada i Anàlisi, Univ. Barcelona. Avda. Gran Via 585, 08007 Barcelona, Spain.