Agraïments

En primer lloc, vull donar les gràcies als Dr. Gerard Gómez i Dr. Carles Simó pel temps que han dedicat a discutir amb mi els diversos temes d'aquesta tesi. Els seus coneixements i el seu mestratge han estat fonamentals per dur a terme aquesta recerca.

Agraeixo al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi (MAiA) el proporcionar-me tot el material necessari pel meu treball. També vull donar les gràcies a tots els autors de [8], [9], [10] i [11] per permetre'm usar el seu programari i els seus textes. Certament, he aprés molt d'ells. Vull expressar la meva gratitud a tots els companys del Departament de MAiA que m'han ajudat de diverses maneres. M'agradaria esmentar en Jaume Timoneda pel seu treball com administrador de sistemes que fa que altra gent pugui usar els ordinadors del Departament com a simples usuaris. També vull esmentar en Àlex Haro que ha seguit d'aprop els progressos en la meva recerca. Agraeixo l'entusiame envers el Problema Quasi-bicircular que han mostrat l'Enric Castellà i en Josep Maria Mondelo. Estic en deute amb aquest últim perquè em va aconsellar sobre l'anàlisi de freqüències fet als capítols 4 i 5. També em va proporcionar una implementació en C de l'algorisme usat per ell per fer aquesta tasca. També estic en deute amb Gerard Albà per lliurar-me de les meves obligacions docents mentre estava acabant d'escriure aquesta tesi. També vull donar les gràcies al Dr. Josep Masdemont (Universitat Politècnica de Catalunya) per les profitoses discussions sobre la reducció del Hamiltonià a la varietat central del capítol 4. També em va proporcionar programari que em va ajudar a implementar l'algorisme en el cas del Problema Quasi-bicircular. Vull donar les gràcies a tota la gent que m'ha encoratjat a escriure aquesta tesi. En aquest sentit, vull fer referència a en Samuel Buxton i a la Dr. Teresa Stuchi (Universidade Federal do Rio de Janeiro).També agraeixo als meus pares i als meus sogres tot el que han fet per mi.

Finalment, he de dir que hi ha una persona sense la qual jo no hagués estat capaç de fer aquesta tesi: la meva dona Sílvia. Ella sempre ha estat al meu costat, especialment als mals moments. Ella és l'única persona que sap realment l'esforç que ha suposat per mi aquesta tesi.

Apèndix: Resum

A.0 Introducció

L'objectiu d'aquesta tesi és l'estudi de l'entorn dels punts col.lineals de libració del sistema Terra-Lluna. La motivació d'aquest estudi és que, en 1970, R.Farquhar va proposar la utilització d'òrbites Halo translunars com a mitjà per establir un enllaç de comunicacions permanent entre la Terra i la cara oculta de la Lluna. De fet, aquest idea havia estat suggerida ja per A.C. Clarke l'any 1950. No obstant això, era difícil calcular aquest tipus d'òrbites per períodes llargs de temps (diguem, per exemple, 20 anys). Fins ara, que nosaltres sapiguem, ningú no havia estat capaç de calcular aquest tipus d'òrbites. Nosaltres ho hem aconseguit i els resultats es mostren al capítol 5.

La nostra recerca va començar per l'estudi del Problema Restringit de Tres Cossos (RTBP) i el Problema Bicircular (BCP). Després de diversos càlculs, semblava que cap dels dos models no s'ajustava bé al problema real a l'entorn de L_2. Calia doncs trobar un altre model intermedi. Aquest és el Problema Quasi-bicircular (QBCP). Un model similar al BCP, però de manera que els tres primaris es mouen en òrbites coherents amb la llei de gravitació de Newton. El primer capítol està dedicat a la deducció de les equacions del moviment d'aquest nou model, el Problema Quasi-bicircular. La major part dels altres capítols estan dedicats a l'estudi de diversos aspectes d'aquest Problema.

El QBCP és un sistema Hamiltonià amb tres graus de llibertat que a més depèn periòdicament del temps. Sigui T aquest període i $\omega_s = 2\pi/T$ la freqüència. El capítol 2 tracta sobre el càlcul d'òrbites T-periòdiques. No és fàcil trobar aquestes òrbites directament. Per aquest motiu, comencem amb òrbites periòdiques del RTBP que tenen per període una fracció de T. Moltes d'aquestes es poden continuar fins a òrbites del QBCP. Per això calen diferents tècniques numèriques: estudi de bifurcacions d'òrbites periòdiques, un mètode de continuació usant paràmetre arc, càlcul de paràmetres d'estabilitat d'òrbites, etc. D'entre totes les òrbites calculades, hi ha algunes que més endavant esdevenen molt importants. Són les òrbites al voltant de L_2 que provenen d'òrbites amb període $T/2$ en el RTBP.

El capítol 3 està dedicat a l'estudi d'òrbites quasi-periòdiques en el QBCP al voltant de L_1 i L_2. En primer lloc, usant el mètode de Lindstedt-Poincaré, trobem aproximacions analítiques de les òrbites quasi-periòdiques a un entorn del punts de libració. D'aquesta manera es troben òrbites del tipus Lyapunov i Lissajous. Aquestes són òrbites sobre tors 2D i 3D, respectivament. Però, pel QBCP, el mètode de Lindstedt-Poincaré no dóna una bona aproximació de les òrbites Halo. Per aquest motiu, per trobar òrbites Halo quasi-periòdiques hem usat el mètode que anomenem refinament analític. Bàsicament consisteix en cercar els coeficients de Fourier d'una solució de les equacions diferencials del moviment. Per resoldre el sistema no lineal infinit dimensional que satisfan els coeficients, s'utilitza un mètode de Newton. Volem recalcar que cal molta feina de manipulació algebraica per aconseguir bones aproximacions analítiques de les òrbites Halo. La nostra principal contribució a la millora del mètode de refinament analític ha estat la introducció de la tolerància relativa en la selecció de les freqüències que intervenen en el mètode de Newton. En el càlcul de les òrbites Halo queda palesa la importància de la resonància $\omega_0 = 2\omega_s$, on ω_0 denota la freqüència pròpia de l'òrbita Halo. També estudiem l'estabilitat de les òrbites de Lyapunov quasi-periòdiques planes, notant que el canvi d'estabilitat en la direcció z està relacionat amb la bifurcació on comencen les Halo quasi-periòdiques.

L'objectiu del capítol 4 és donar una descripció completa dels diferents tipus d'òrbites en un entorn gran al voltant de L_2. Això s'aconsegueix mitjantçant la reducció del Hamiltonià a la varietat central. Per fer això, s'han d'aplicar diversos canvis de variables simplèctics, però el procés es pot resumir en tres etapes. La primera és fer una translació a la petita òrbita periòdica al voltant de L_2. La segona és fer un canvi de Floquet per diagonalitzar la part quadràtica del Hamiltonià. El tercer pas és cancel.lar termes d'ordre superior a dos. Volem remarcar que, al nostre cas, és possible eliminar la dependència del temps fins a ordre elevat sense introduir petits divisors.

Al capítol 4, calculem el Hamiltonià reduït a la varietat central fins a ordre setze. Aquest és un Hamiltonià amb dos graus de llibertat. L'estudi d'aquest es fa mitjançant l'aplicació de Poincaré per diferents nivells d'energia. Tots els objectes estudiats (punts fixos, òrbites periòdiques, varietats invariants, tors 2D, ...) són interpretats en termes de les coordenades inicials del QBCP.

El capítol 5 està dedicat a les òrbites Halo del Sistema Solar. Les efemèrides del JPL s'usen com a model del Sistema Solar. Com hem dit abans, hem obtingut òrbites Halo per períodes llargs de temps. Aquestes òrbites han estat calculades a partir d'òrbites Halo del QBCP del capítol 3. Una de les claus en l'èxit del càlcul de les òrbites Halo ha estat una millora al mètode del tir paral.lel (també anomenat tir múltiple). En el nostre cas, un nova condició de minimització redueix la dimensió del sistema a resoldre i millora la convergència cap a la solució desitjada.

Finalment, la secció de *Conlusions i perspectives* dóna diversos punts per continuar la nostra línia de recerca.

A.1 El Problema Quasi-bicircular: equacions del moviment

En la deducció de les equacions del moviment hi ha dues parts diferenciades. La primera consisteix en trobar una solució quasi-bicircular del Problema de Tres Cossos, expressada com a sèrie de Fourier. La segona és escriure les equacions del moviment d'una massa infinitesimal sotmesa a l'atracció gravitatòria dels tres cossos anteriors.

A.1.1 Solució quasi-bicircular del Problema de Tres Cossos

Anem a cercar una solució quasi-bicircular del Problema general de Tres Cossos (3BP), usant les masses de la Lluna, la Terra i el Sol, que denotarem per μ, $1-\mu$ and m_s, respectivament. Les unitats de massa, temps i longitud es prenen de forma que la constant de gravitació, la distància Terra-Lluna i el seu moviment mig siguin iguals a la unitat.

Considerem la formulació de Jacobi del 3BP usant els vectors de posició relativa $\vec{r}$ i $\vec{R}$ (veure figura A.1). Les equacions del moviment poden ser escrites en notació complexa, usant z i Z en lloc de $\vec{r}$ i $\vec{R}$. Aquestes són

$$\ddot{z} = -\frac{z}{r^3} + m_s\left(\frac{Z-\mu z}{r_{es}^3} - \frac{Z+(1-\mu)z}{r_{ms}^3}\right), \tag{A.1}$$

$$\ddot{Z} = -(1+m_s)\left(\mu\,\frac{Z+(1-\mu)z}{r_{ms}^3} + (1-\mu)\,\frac{Z-\mu z}{r_{es}^3}\right), \tag{A.2}$$

on $r=|z|$, $r_{ms}=|Z+(1-\mu)z|$, $r_{es}=|Z-\mu z|$. Volem una solució

$$z \simeq e^{it}, \qquad Z \simeq a_s e^{in_s t},$$

on n_s és el moviment mig del Sol i a_s la distància mitjana entre el Sol i el baricentre Terra-Lluna. Com a valor de μ hem usat 0.0121505816. Per trobar una solució introduim un petit paràmetre $\epsilon = 1/a_s \simeq 1/389$. Aleshores, busquem una solució de la forma

$$z = e^{it}\,(1+\sum_{k\geq 1}\epsilon^k u_k), \qquad Z = a_s e^{in_s t}\,(1+\sum_{k\geq 1}\epsilon^k v_k),$$

on u_k i v_k són polinomis trigonometrics amb freqüència bàsica $\omega_s = 1-n_s$. Substituint a les equacions diferencials (A.1) i (A.2), i igualant termes del mateix ordre en ϵ, es poden trobar recursivament els polinomis trigonomètrics u_k i v_k. Per calcular cadascun del polinomis, cal resoldre una equació diferencial a coeficients constants. Finalment, sumant tots els termes en potències de ϵ, obtenim una representació de la solució $z(t)$, $Z(t)$, amb el següent aspecte

$$z = e^{it}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j e^{ij\omega_s t}, \qquad Z = a_s e^{in_s t}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j e^{ij\omega_s t}, \tag{A.3}$$

on $b_j, c_j \in \mathbb{R}$.

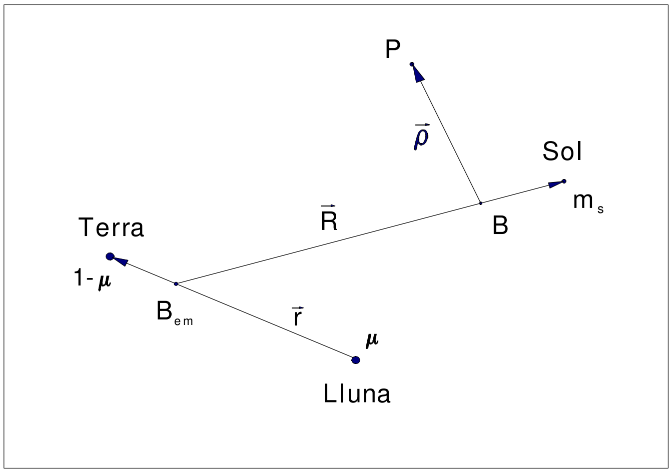

Figura A.1: Un problema de quatre cossos usant la descomposició de Jacobi pels tres primaris.

A.1.2 Problema Quasi-bicircular

El QBCP és un problema de quatre cossos on tres masses descriuen un moviment quasi-bicircular i la quarta massa és suficientment petita per no influir en el moviment dels tres primaris. Al nostre cas, els tres primaris són el Sol, la Terra i la Lluna, així doncs els vectors $\vec{r}(t)$ i $\vec{R}(t)$ són les funcions calculades a la secció anterior. La quarta partícula pot ser, per exemple, una nau espacial.

Per a expressar el Hamiltonià de la massa P de forma adient, cal fer un canvi de variables (translació + rotació + homotècia) de forma que la Terra i la Lluna quedin situades en els punts fixos de coordenades $(\mu, 0, 0)$ i $(\mu-1, 0, 0)$, respectivament, com és habitual al RTBP. D'aquesta manera, el Hamiltonià és

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\alpha_1(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\alpha_2(p_x x+p_y y+p_z z)+\alpha_3(p_x y-p_y x)+ \\ &\quad +\alpha_4 x+\alpha_5 y-\alpha_6\left(\frac{1-\mu}{q_{pe}}+\frac{\mu}{q_{pm}}+\frac{m_s}{q_{ps}}\right) , \end{aligned}$$

on

$$q_{pe}^2=(x-\mu)^2+y^2+z^2 , \qquad q_{pm}^2=(x-\mu+1)^2+y^2+z^2 ,$$
$$q_{ps}^2=(x-\alpha_7)^2+(y-\alpha_8)^2+z^2 ,$$

i α_k són de la forma

$$\begin{aligned} \alpha_k(t) &= \alpha_{k0}+\sum_{j\geq 1}\alpha_{kj}\cos(j\omega_s t) , \qquad k=1,3,4,6,7, \\ \alpha_k(t) &= \sum_{j\geq 1}\alpha_{kj}\sin(j\omega_s t) , \qquad k=2,5,8. \end{aligned}$$

j	α_1 c	α_2 s	α_3 c	α_4 c
0	1.00184161e+00		1.00000000e−00	−9.75524233e−04
1	5.76751773e−04	−2.64437603e−04	5.63412600e−04	2.15476436e+00
2	1.43877703e−02	−1.32868690e−02	1.88968744e−02	3.65748447e−04
3	−2.63036297e−06	9.38609321e−06	−9.91175880e−06	3.29567338e−03
4	1.17627836e−04	−1.21850906e−04	1.56870814e−04	3.30103140e−07
5	−8.06858139e−08	1.52212760e−07	−1.70776258e−07	1.27884069e−05
6	9.84324977e−07	−1.07210266e−06	1.31961368e−06	−2.62379795e−09
7	−1.17205439e−09	1.88937126e−09	−2.13655004e−09	6.53380551e−08
8	8.31190597e−09	−9.32498503e−09	1.11716892e−08	−3.89172071e−11
j	α_5 s	α_6 c	α_7 c	α_8 s
0		1.00090746e+00	−6.31406957e−02	
1	−2.19257075e+00	2.87092175e−04	3.88563862e+02	−3.89743726e+02
2	−3.33721049e−04	7.18717800e−03	1.73691020e−01	−1.73427917e−01
3	−3.29500143e−03	−2.35118315e−06	3.38290807e+00	−3.38569649e+00
4	−3.10063505e−07	4.58575897e−05	1.57483757e−04	−1.55588663e−04
5	−1.27777734e−05	−3.84868362e−08	2.93636049e−02	−2.93758267e−02
6	2.65280641e−09	3.27067750e−07	−1.22443455e−05	1.22585121e−05
7	−6.52847925e−08	−4.40696648e−10	2.53893543e−04	−2.53959689e−04
8	3.89172071e−11	2.45260066e−09	−2.27892904e−07	2.28002922e−07

Taula A.1: Coeficients de Fourier fins a ordre 8 de les funcions α_k.

Les funcions α_k poden ser calculades a partir de $\vec{r}(t)$, $\vec{R}(t)$ i les seves derivades. La taula A.1 mostra alguns dels coefficients de Fourier d'aquestes funcions. El valor usat per ω_s ha estat 0.925195985520347.

Notem que el Hamiltonià del QBCP pot ser considerat com una pertorbació del RTBP. La principal diferència entre aquests dos problemes és que el QBCP no és autònom, depèn periòdicament del temps amb freqüència ω_s. El període el denotem per $T = 2\pi/\omega_s$.

A.2 Òrbites periòdiques del QBCP al voltant del punts de Lagrange

Al QBCP, els punts de Lagrange es defineixen geomètricament ja que no existeixen punts d'equilibri com en el RTBP. Degut a que el Hamiltonià del QBCP és T-periòdic, les òrbites periòdiques tenen com a període un múltiple de T. Hem trobat diverses òrbites T-periòdiques del QBCP al voltant dels punts de Lagrange, a partir d'òrbites del RTBP de períodes T, $T/2$, $T/3$ i $T/4$. Considerem la família de Hamiltonians

$$H = H_{RTBP} + \epsilon \left(H_{QBCP} - H_{RTBP} \right) .$$

Per $\epsilon = 0$, H és el Hamiltonià del RTBP, i per $\epsilon = 1$, H és el del QBCP. Cal recordar que el RTBP és autònom. Per això, en primer lloc, cal estudiar les bifurcacions de les òrbites del RTBP abans esmentades, per saber quins punts d'aquestes es poden continuar cap al QBCP. Després cal utilitzar un mètode de continuació per anar des del RTBP al QBCP, tenint cura de les possibles bifurcacions que apareguin. Al moure el paràmetre de continuació ϵ, hem trobat casos on a partir d'una òrbita neixen un parell més, de manera que finalment n'hi ha tres, o a la inversa, tres òrbites s'ajunten i finalment només en subsisteix una.

De totes les òrbites calculades, aquí només hem considerat oportú mostrar les de les figures A.2, A.3 i A.4, totes tres situades al voltant del punt L_2. La primera és la que substitueix el punt d'equilibri L_2. Les altres provenen d'òrbites $T/2$-periòdiques del RTBP.

A.3 Òrbites quasi-periòdiques del QBCP al voltant dels punts L_1 i L_2

Pel càlcul d'òrbites quasi-periòdiques al voltant de L_1 o L_2 és convenient escriure les equacions del moviment en les anomenades coordenades normalitzades. Ara, l'origen de coordenades és el punt L_i (i=1,2) i la unitat de longitud és la distància de la Lluna a L_i. Els eixos es prenen com mostra la figura A.5.

Les equacions diferencials del QBCP són

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} - (1+2c_2)x &= \sum_{n=2}^{\infty} c_{n+1}(n+1)\,T_n + \\
&\quad +\alpha_{10}\ddot{x} + \alpha_{11}\dot{x} + \alpha_{12}\dot{y} + \alpha_{13}x + \alpha_{14}y + \alpha_{15} + \\
&\quad +\alpha_{16}\sum_{n=2}^{\infty} c_{n+1}(n+1)\,T_n + \alpha_{20}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial G_n}{\partial x}\,, \qquad \text{(A.4)}\\
\ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2-1)y &= y\sum_{n=2}^{\infty} c_{n+1}R_{n-1} + \\
&\quad +\alpha_{10}\ddot{y} - \alpha_{12}\dot{x} + \alpha_{11}\dot{y} - \alpha_{14}x + \alpha_{17}y + \alpha_{18} + \\
&\quad +\alpha_{16}y\sum_{n=2}^{\infty} c_{n+1}R_{n-1} + \alpha_{20}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial G_n}{\partial y}\,, \qquad \text{(A.5)}\\
\ddot{z} + c_2 z &= z\sum_{n=2}^{\infty} c_{n+1}R_{n-1} + \\
&\quad +\alpha_{10}\ddot{z} + \alpha_{11}\dot{z} + \alpha_{19}z + \\
&\quad +\alpha_{16}z\sum_{n=2}^{\infty} c_{n+1}R_{n-1} + \alpha_{20}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial G_n}{\partial z}\,. \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}$$

Les funcions α_k per $k = 10, \ldots, 20$ són T-periòdiques i poden ser calculades a partir de les anteriors α_k. Els termes dels sumatoris provenen de les expansions

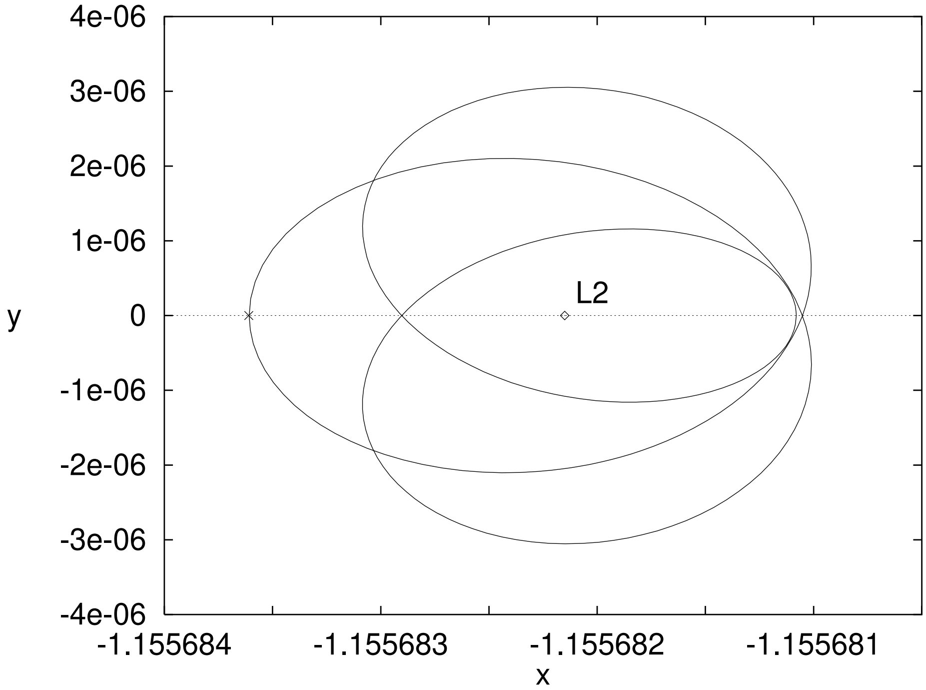

Figura A.2: Òrbita periòdica plana anomenada 21 al voltant de L_2.

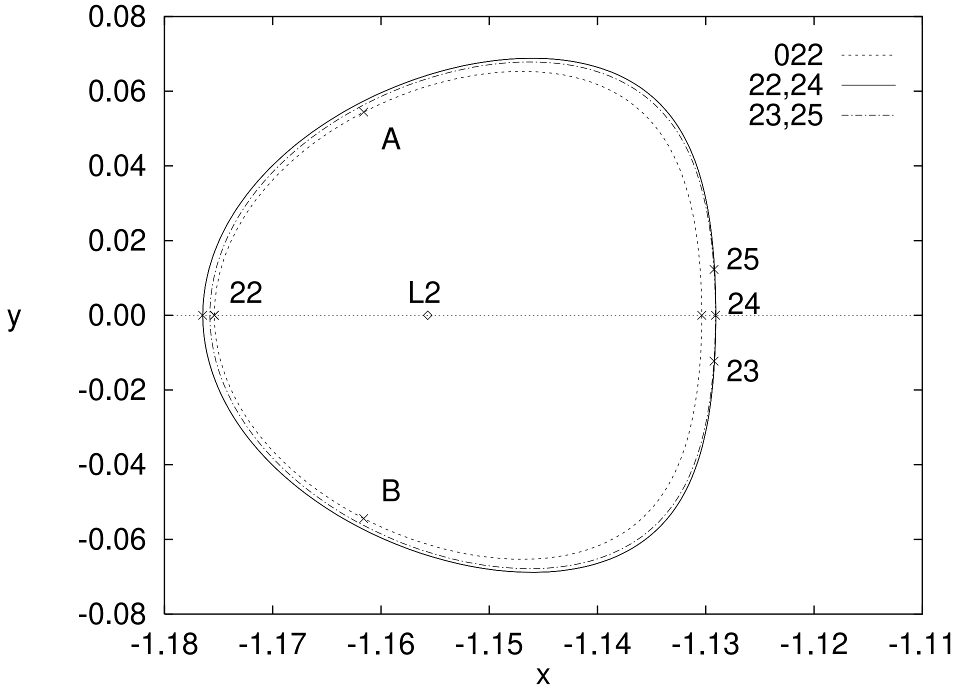

Figura A.3: Òrbites periòdiques planes 22, 23, 24 i 25 al voltant de L_2. L'òrbita 022 del RTBP també ha estat dibuixada. Cada òrbita dóna dues voltes al voltant de L_2. Els punts anomenats A i B són els punts de bifurcació de 022 que generen les òrbites 23 i 25, respectivament.

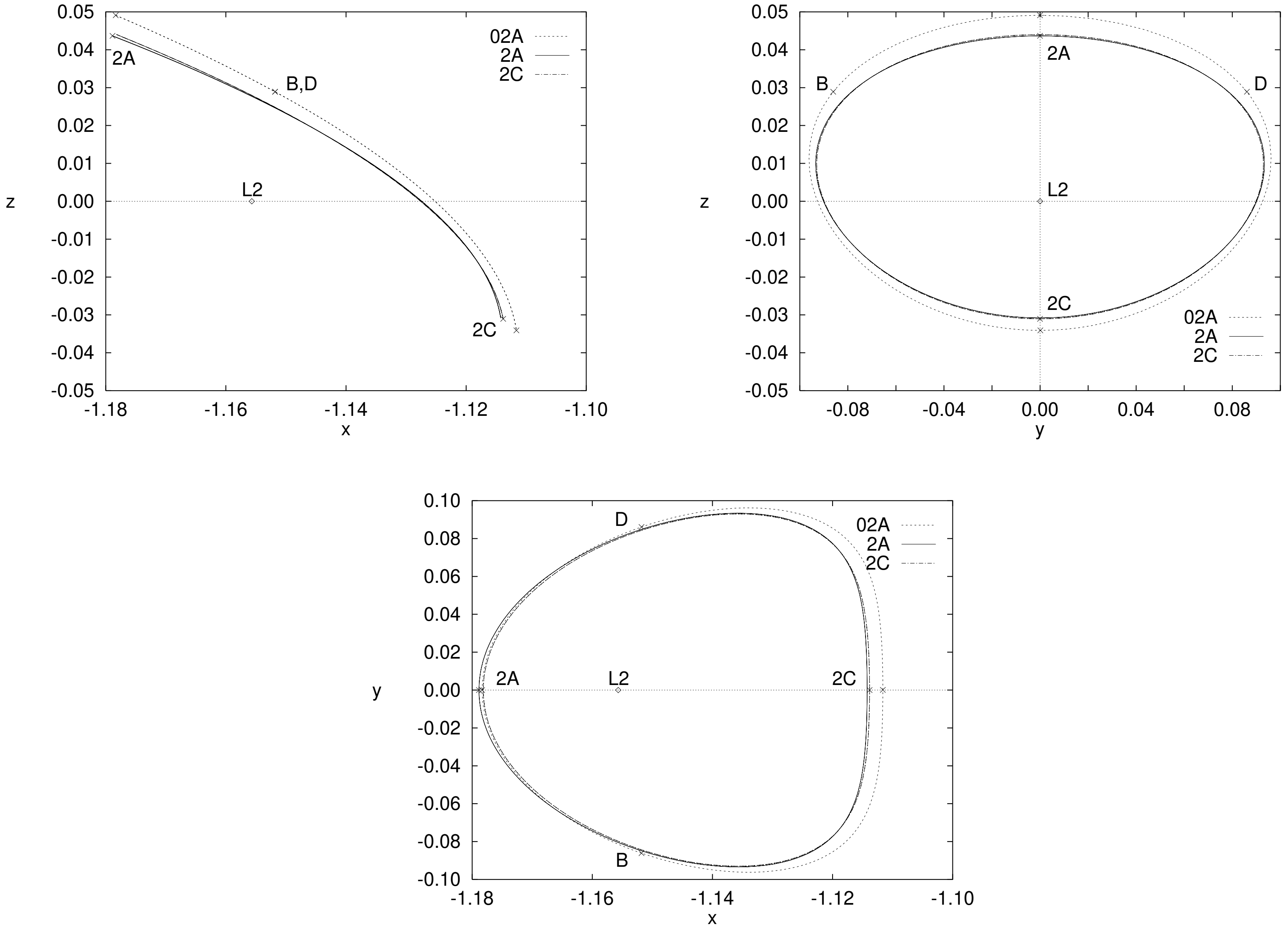

Figura A.4: Òrbites periòdiques 2A i 2C del QBCP i òrbita 02A del RTBP. Cada òrbita dóna dues voltes al voltant de L_2.

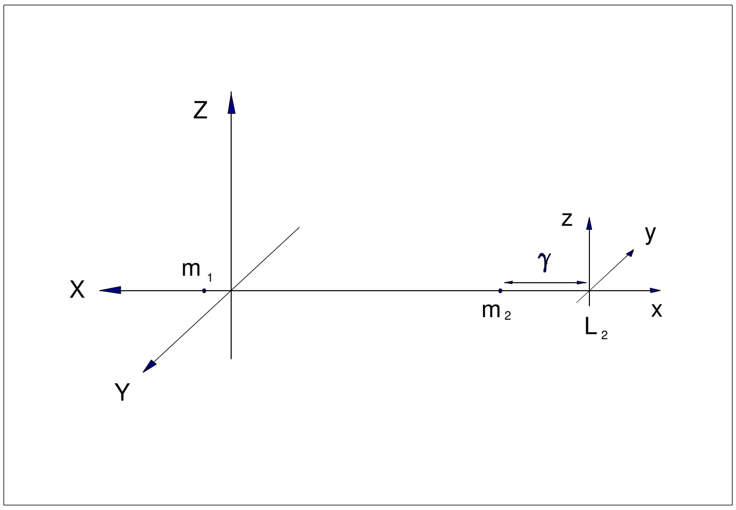

Figura A.5: Sistema de coordenades sinòdiques (X, Y, Z) i coordenades normalitzades (x, y, z) en el cas de L_2.

del potencial en polinomis de Legendre. Els coeficients c_n són els que surten habitualment en aquests tipus de desenvolupaments pel RTBP. T_n, R_n and G_n són polinomis en x, y i z. A més, G_n és T-periòdica en el temps. Aquestes funcions es poden calcular recursivament.

A.3.1 Òrbites quasi-periòdiques del QBCP calculades usant Lindstedt-Poincaré

El mètode de Lindstedt-Poincaré permet trobar solucions desenvolupades en sèrie. Malgrat que aquestes sèries no siguin convergents en cap domini obert, el truncament de les sèries a ordre baix pot donar bones aproximacions d'òrbites quasi-periòdiques en un entorn de L_i, $i = 1, 2$.

Com a primera aproximació considerem el RTBP linealitzat. La solució restringida a la varietat central és

$$\begin{aligned} x &= -A\cos(\lambda_1 t + \varphi_1) , \\ y &= KA\sin(\lambda_1 t + \varphi_1) , \\ z &= B\cos(\lambda_2 t + \varphi_2) , \end{aligned} \tag{A.7}$$

on les freqüències

$$\lambda_1 = \left\{ \begin{array}{l} 2.3343858538 , \\ 1.8626458835 , \end{array} \right. \qquad \lambda_2 = \left\{ \begin{array}{ll} 2.2688310630 & \text{per a } L_1 , \\ 1.7861761647 & \text{per a } L_2 , \end{array} \right. \tag{A.8}$$

i K és una constant que depèn de λ_1 i c_2. Les amplituds en la direcció x, A, i en la direcció vertical, B, així com les fases φ_1 i φ_2 sòn arbitràries.

Anem a cercar una solució formal de les equacions (A.4), (A.5) i (A.6) del QBCP de la forma

$$\begin{aligned} x &= \sum x_{ijk_1k_2k_3m} A^i B^j \gamma_1^{k_1} \gamma_2^{k_2} \gamma_3^{k_3} \epsilon^m \ , \\ y &= \sqrt{-1} \sum y_{ijk_1k_2k_3m} A^i B^j \gamma_1^{k_1} \gamma_2^{k_2} \gamma_3^{k_3} \epsilon^m \ , \\ z &= \sum z_{ijk_1k_2k_3m} A^i B^j \gamma_1^{k_1} \gamma_2^{k_2} \gamma_3^{k_3} \epsilon^m \ , \end{aligned} \tag{A.9}$$

on $x_{ijk_1k_2k_3m}$, $y_{ijk_1k_2k_3m}$, $z_{ijk_1k_2k_3m} \in \mathbb{R}$, i, j, k_1, k_2, k_3, $m \in \mathbb{Z}$, $i, j, m \geq 0$, i

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \exp(\sqrt{-1}\,(\lambda_1 \omega_1 t + \varphi_1)) \ , \\ \gamma_2 &= \exp(\sqrt{-1}\,(\lambda_2 \omega_2 t + \varphi_2)) \ , \\ \gamma_3 &= \exp(\sqrt{-1}\,\omega_s t) \ , \end{aligned}$$

amb ω_1 i ω_2 depenent de les amplituds de la següent forma:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1 + \sum d_{ijm} A^i B^j \epsilon^m \ , \\ \omega_2 &= 1 + \sum f_{ijm} A^i B^j \epsilon^m \ , \end{aligned}$$

i la freqüència ω_s com abans. Els coeficients d'una solució d'aquestes es poden calcular recursivament augmentant el grau en la parella AB i en el paràmetre ϵ.

Després de calcular una solució del tipus (A.9), sumem tots els termes en potències d'ϵ i obtenim

$$\begin{aligned} x &= \sum \overline{x}_{ijk_1k_2k_3} A^i B^j \gamma_1^{k_1} \gamma_2^{k_2} \gamma_3^{k_3} \ , \\ y &= \sqrt{-1} \sum \overline{y}_{ijk_1k_2k_3} A^i B^j \gamma_1^{k_1} \gamma_2^{k_2} \gamma_3^{k_3} \ , \\ z &= \sum \overline{z}_{ijk_1k_2k_3} A^i B^j \gamma_1^{k_1} \gamma_2^{k_2} \gamma_3^{k_3} \ , \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sum \overline{d}_{ij} A^i B^j \ , \\ \omega_2 &= \sum \overline{f}_{ij} A^i B^j \ . \end{aligned} \tag{A.11}$$

La figura A.6 mostra un exemple típic d'òrbita de Lissajous calculada amb aquest procediment fins a grau 11 en la parella (A, B) i fins a grau 9 en ϵ. Com a casos particulars d'aquestes, fent igual a zero una de les dues amplituds A o B, s'obtenen també aproximacions de les òrbites de Lyapunov planes i de les verticals. També hem calculat la regió on hi ha bona concordància entre els desenvolupaments i les òrbites integrades numèricament. Aquesta regió es considerablement més petita en la direcció del pla xy que en la direcció de z.

A.3.2 Òrbites Halo quasi-periòdiques del QBCP

L'objectiu és trobar una òrbita de la forma

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} x_k \gamma_1^{k_1} \gamma_2^{k_2} \ , \qquad y = i \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} y_k \gamma_1^{k_1} \gamma_2^{k_2} \ , \qquad z = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} z_k \gamma_1^{k_1} \gamma_2^{k_2} \ ,$$

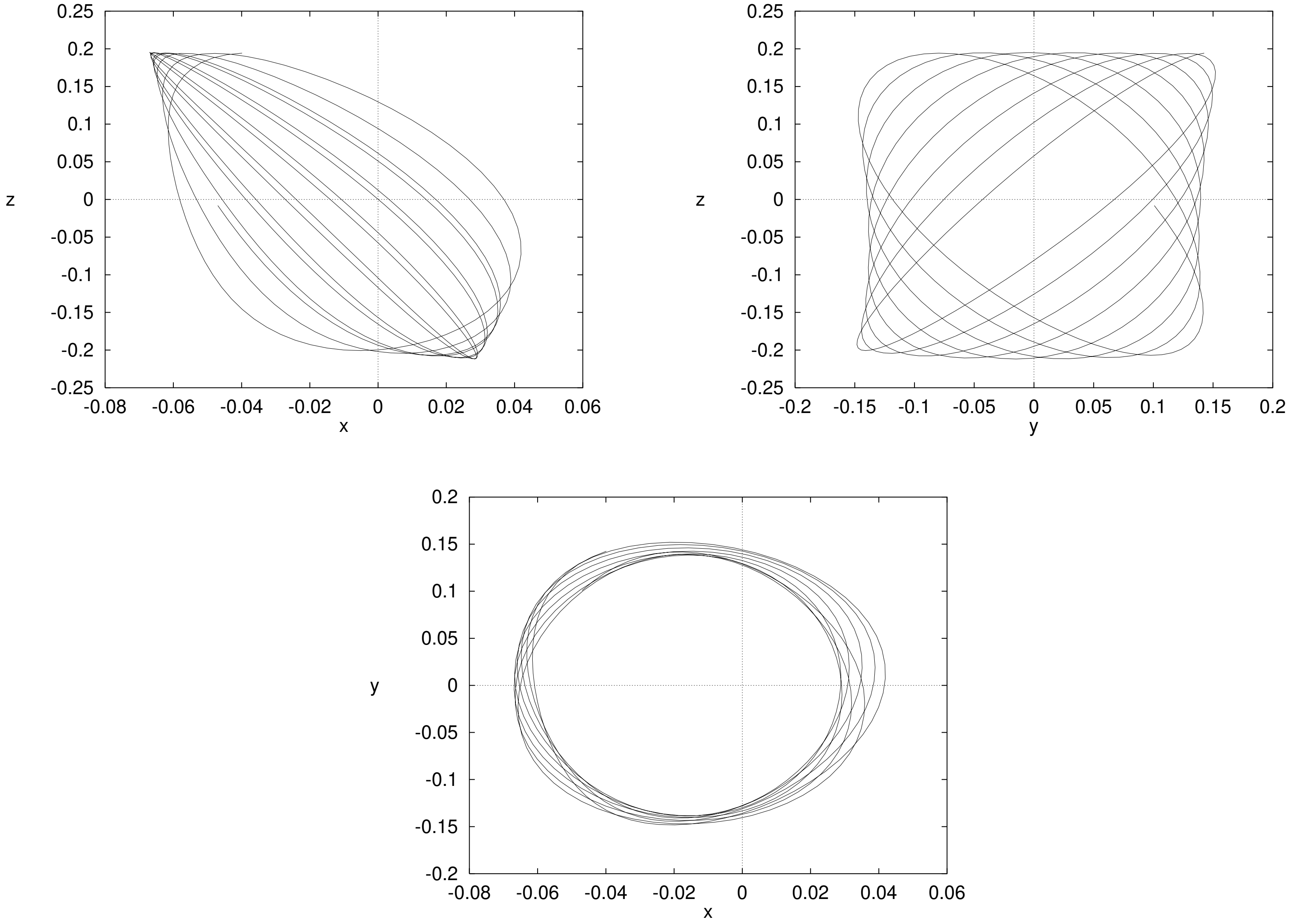

Figura A.6: Òrbita de Lissajous del QBCP al voltant de L_2 usant coordenades normalitzades. $A = 0.05$, $B = 0.2$, $t_0 = 0$, $t_f = 4T$, $\varphi_1 = 0.8$ i $\varphi_2 = 1.57$.

on x_k, y_k, $z_k \in \mathbb{R}$, k denota el multiindex (k_1, k_2) i

$$\gamma_1 = \exp(i(\omega_0 t + \varphi_0)) , \qquad \gamma_2 = \exp(i\omega_s t) ,$$

on ω_0 és una freqüència prefixada. La fase φ_0 és arbitrària. A més, tenim les condicions de simetria $x_k = x_{-k}$, $y_k = -y_{-k}$ i $z_k = z_{-k}$.

Sigui $\mathcal{F}$ l'espai de les sèries de Fourier reals amb dues freqüències bàsiques ω_0 i ω_s, $\mathcal{F}_0$ el subespai de $\mathcal{F}$ de les funcions parelles i $\mathcal{F}_1$ el de les funcions senars. Les equacions (A.4), (A.5) i (A.6) permeten definir una funció

$$F : \mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_0 .$$

Així doncs, el problema es redueix a resoldre un sistema no lineal d'equacions $F(X) = 0$ on $X = (\{x_k\}_k, \{y_k\}_k, \{z_k\}_k)$. Això es pot fer usant el mètode de Newton

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - DF^{-1}(X^{(j)})F(X^{(j)}) ,$$

prenent com a $X^{(0)}$ els coeficients de Fourier d'una òrbita Halo del RTBP. Com l'equació és infinit dimensional, cal un truncament i la utilització d'un mètode adaptatiu. Sigui $M_j = \|F(X^{(j)})\|_\infty$ i $\kappa \in \mathbb{R}$, $0 < \kappa \ll 1$, per exemple, $\kappa = 10^{-5}$. A cada iteració del mètode de Newton, les freqüències seleccionades són aquelles tals que els seus coeficients en $F(X^{(j)})$ són més grans que κM_j. Volem comentar que sovint cal considerar la família d'equacions $\tilde{F}(\epsilon, X) = 0$ de forma que $\tilde{F}(1, X) = F(X)$ i $\tilde{F}(0, X)$ és la que ve donada per les equacions diferencials del RTBP. Aleshores, es poden fer diversos passos de continuació per anar des de l'aproximació inicial $X^{(0)}$, que cumpleix $\tilde{F}(0, X^{(0)}) = 0$, fins a obtenir una solució pel QBCP.

Les figures A.7a-b mostren les amplituds x i z de les òrbites calculades. Notem el "forat" corresponent a la resonància $\omega_0 = 2\omega_s$. A la segona figura, sobre l'eix de les ω_0, hem marcat amb un asterisc el punt de bifurcació on neixen les òrbites Halo. Aquest punt correspon al canvi d'estabilitat en la direcció z de la família de tors 2D Lyapunov plans. L'estabilitat d'aquests tors ve donada pels seus exponents de Lyapunov. Aquests es poden estimar integrant per un període suficientment llarg de temps les equacions variacionals en la direcció z, al llarg d'una òrbita quasi-periòdica prèviament calculada.

A.4 Descripció de l'entorn de L_2

Amb la finalitat de donar una descripció completa dels diferents tipus d'òrbites que es poden trobar a l'entorn de L_2, hem fet la reducció del Hamiltonià a la varietat central fins a ordre 16. Per a fer aquesta reducció, cal fer diversos canvis de variables canònics. Cadascun d'ells ve donat per una funció generatriu. El Hamiltonià transformat s'obté mitjançant el mètode de Lie.

El procés de reducció a la varietat central es pot resumir en les següents etapes:

1. Càlcul de l'òrbita periòdica que substitueix el punt de libració L_2. El primer canvi de variables és una translació (depenent del temps) a l'òrbita periòdica.

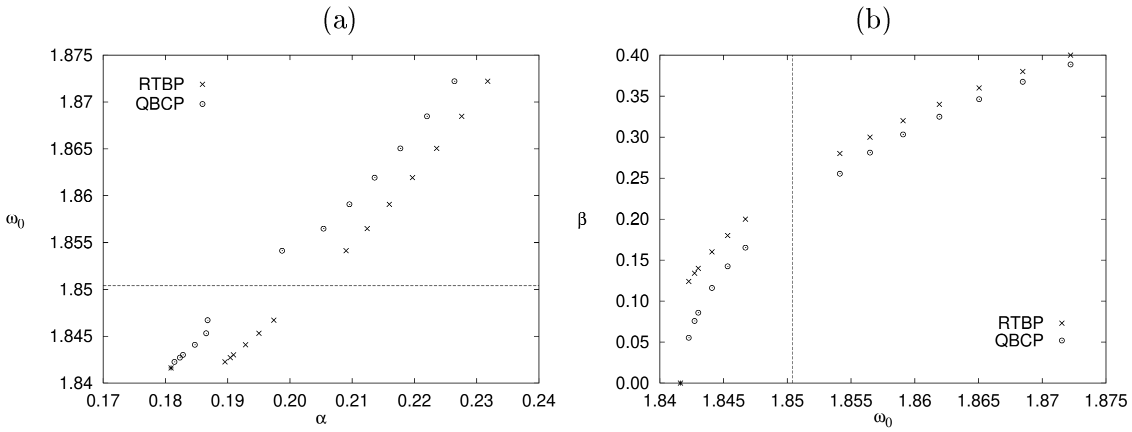

Figura A.7: (a) Freqüència ω_0 i amplitud x de les òrbites Halo al voltant de L_2. La discontínua correspon a la freqüència $\omega_0 = 2\omega_s$. L'asterisc senyala el punt de bifurcació de les Halo. (b) Analogament, amb l'amplitud z.

2. Càlcul del canvi de Floquet per diagonalitzar la part quadràtica del Hamiltonià. Aquest canvi es pot calcular a partir del Hamiltonià inicial. En primer lloc, calculem la matriu de monodromia de l'òrbita periòdica abans esmentada. Llavors, es calcula un logaritme de la matriu de monodromia dividit pel període. Notem que pel càlcul d'aquest logaritme es convenient trobar la forma de Jordan de la matriu. Després d'això, la matriu del canvi de Floquet s'obté integrant una equació diferencial lineal i fent anàlisi de Fourier de la solució d'aquesta.

3. El següent canvi de variables és la complexificació de les parelles de variables de la part central del Hamiltonià. Aquest canvi és fonamental per que la cancel.lació de termes d'ordre superior es faci de forma eficient.

4. Una vegada calculats els tres canvis de variables anteriors, hom pot fer l'expansió del Hamiltonià en sèrie de potències.

5. Càlcul de succesius canvis de variables per cancel.lar els termes d'ordre superior a dos. Per la reducció a la varietat central, només cal cancel.lar els termes de grau 1 en la parella de variables hiperbòlica. Amb aquests canvis, al nostre cas, també es pot eliminar la dependència del temps fins a ordre elevat sense introduir petits divisors.

6. Finalment, cal fer el canvi de variables anomenat realificació, que és el canvi invers de la complexificació.

El Hamiltonià reduït a la varietat central fins a ordre 16 té dos graus de llibertat i és autònom. Sigui $H_{CM}(x_1, y_1, x_3, y_3)$ aquest Hamiltonià. L'eina principal per l'estudi d'aquest Hamiltonià ha estat la utilització de seccions de Poincaré per diferents nivells d'energia. La figura A.8 mostra alguns centenars d'iterats de 33 condicions inicials de l'aplicació de Poincaré sobre $\{x_3 = 0, \dot{x}_3 > 0\}$ pel nivell d'energia $h = 0$.

Hem fet una descripció força completa de les famílies de tors 2D i 3D que es troben al voltant de L_2. Al QBCP, al voltant de L_2, hi ha una òrbita periòdica petita substituint el punt d'equilibri del RTBP. A partir d'aquesta òrbita, neixen dues famílies Cantorianes de tors 2D Lyapunov, una plana i una altra vertical. També tenim tors 3D semblants als Lissajous del RTBP. Seguint la família plana, augmentant l'amplitud de les òrbites, hi ha un moment en que deixen de ser estables en la direcció z. A partir d'aquest punt, neixen dues famílies simètriques (també Cantorianes) de tors Halo 2D. Com a òrbites periòdiques resonants d'ordre baix tenim les anomenades 22, 23, 24, 25, 2A i 2C. Les quatres primeres són planes i provenen d'una òrbita de Lyapunov del RTBP amb període $T/2$. Les altres dues són òrbites Halo i també corresponen a una resonància 1:2. De les òrbites 22, 23, 24 i 25 neixen quatre famílies de tors 2D caracteritzats per tenir la freqüència horitzontal igual a $2\omega_s$. Tres d'aquestes famílies, per una certa amplitud z, s'ajunten en un bifurcació i només en subsisteix una. Suposem que aquestes famílies de tors resonants estan d'alguna manera relacionades amb les òrbites Halo 2A i 2C, però això encara no s'ha pogut determinar. Dissortadament, la reducció del Hamiltonià no dóna una bona aproximació de la dinàmica a l'entorn de les Halo resonants. De les famílies de tors 2D resonants, la meitat són el.líptics i la meitat hiperbòlics, com és natural. Al voltant dels tors el.líptics es troben tors 3D. Com exemple, la figura A.9 mostra una secció d'un d'aquests tors. Les varietats invariants estables i inestables dels tors hiperbòlics separen de forma efectiva aquests tors 3D dels tors de tipus Lissajous abans esmentats.

A.5 Òrbites Halo translunars del Sistema Solar

La motivació per l'estudi de les òrbites Halo translunars és la seva aplicació a missions espacials. Com hem comentat a la introducció, aquestes òrbites poden ser utilitzades per establir comunicació permanent entre la Terra i la cara oculta de la Lluna. Semblava però difícil aconseguir calcular òrbites d'aquest tipus per períodes llargs de temps. Actualment, això és possible.

Les claus per aconseguir òrbites Halo del Sistema Solar han estat, en primer lloc, tenir una bona aproximació que ve donada per les Halo del QBCP, i en segon lloc, una modificació en el mètode del tir paral.lel que, en el nostre cas, millora substancialment la convergència cap la solució desitjada.

Per integrar les equacions del moviment d'una partícula movent-se al Sistema Solar s'utilitzen les efemèrides DE403 del JPL. A partir d'un conjunt inicial de punts d'una òrbita Halo del QBCP,

$$(t_0, \bar{x}_0), (t_1, \bar{x}_1), \ldots, (t_n, \bar{x}_n) ,$$

el mètode del tir paral.lel s'utilitza per calcular una òrbita al Sistema Solar. La linearització de les equacions d'empalmament porta a un sistema amb $6n$ equacions

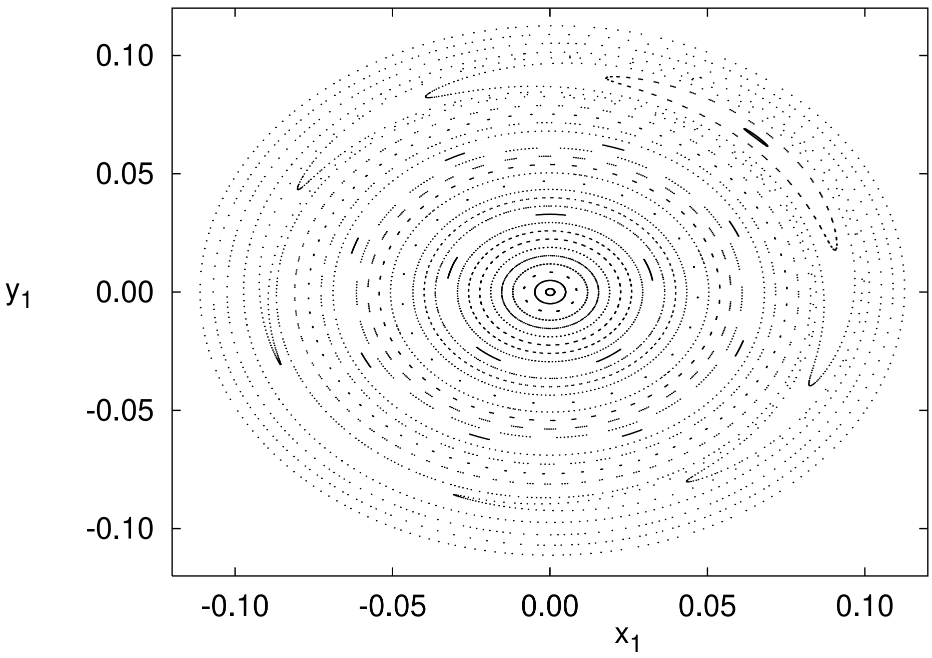

Figura A.8: Secció de Poincaré del Hamiltonià reduït a la varietat central pel nivell d'energia $h = 0$.

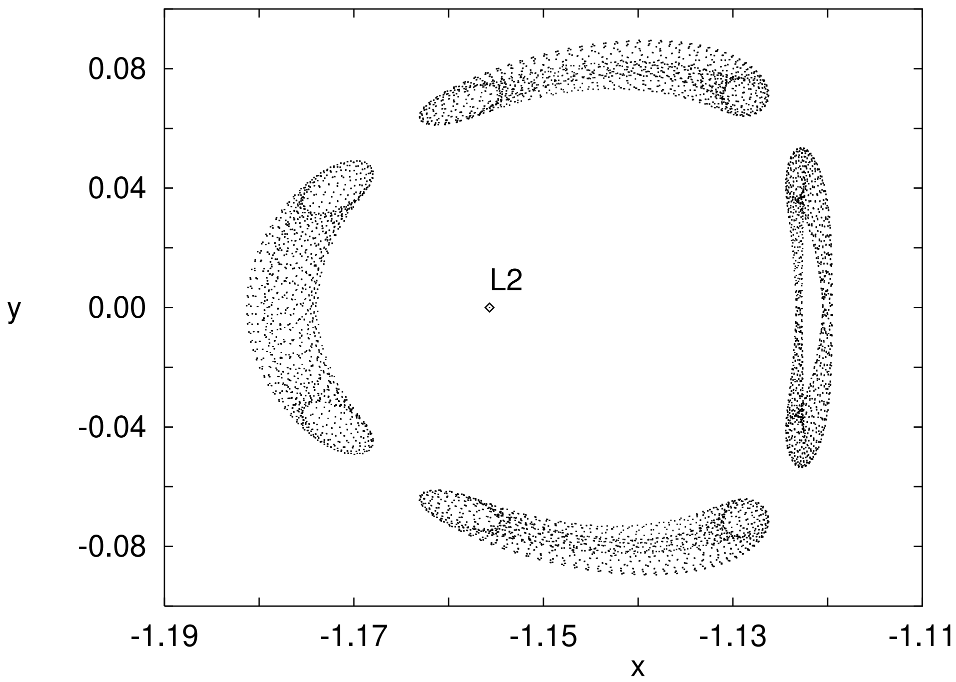

Figura A.9: Secció d'un tor 3D al voltant d'un tor 2D. El dibuix mostra els punts pels temps $t = kT/8$, $k = 0, \ldots, 8192$.

i $6n+6$ incògnites, que són les correccions Δx_k, $k=0,\ldots,n$, que cal fer al conjunt inicial de punts. Cal doncs alguna condició addicional per determinar aquestes correccions. Es pot demanar, per exemple, que les correccions siguin mínimes en norma dos. En el nostre cas, dóna millors resultats imposar només que sigui mínim

$$\sum_{j=0}^{n/m} \Delta x_{jm}^2 \ ,$$

amb $m=30$, per exemple.

Cal tenir en compte que una revolució al voltant de L_2 costa de l'ordre de 15 dies. D'altra banda, les òrbites són molt inestables. Això fa que calgui usar quatre punts per dia, és a dir, 60 punts per revolució. Si, per exemple, volem calcular una òrbita per un interval de temps de 8000 dies, s'haurà de resoldre un sistema lineal amb 192000 equacions. Usant la condició de minimització abans esmentada, el nombre d'equacions del sistema lineal es divideix per m. Això vol dir que si $m=30$, la dimensió del sistema queda reduïda a 6400.

La figura A.10 mostra una d'aquestes òrbites per un interval de temps de 45 anys. Mirant el perfil de la projecció (temps,z), sembla que hi ha dues ones superposades. Fent anàlisi de Fourier s'ha pogut determinar que l'ona llarga està relacionada amb la diferència $\omega_p - 2\omega_s$, on ω_p és la freqüència pròpia de l'òrbita Halo, mentre que l'ona curta està relacionada amb la freqüència normal a l'Halo. Notem que, el mètode del tir paral.lel, tal com ha estat implementat, no té perquè arribar a una òrbita Halo "pura" (sense component normal). És més, genèricament, el que s'obté és una òrbita del tipus quasi-halo.

La figura A.11 mostra les amplituds d'algunes de les òrbites Halo calculades pel model JPL, QBCP i RTBP. Notem que l'efecte de la resonància $\omega_p \simeq 2\omega_s$ és visible tant en el cas del QBCP com en el de model JPL. Així mateix, les òrbites Halo del model JPL estan molt més a prop de les del QBCP que de les del RTBP. Això dóna una evidència clara de la conveniència d'utilitzar el model QBCP com a model de referència, al menys a aquesta regió de l'espai de fases.

Conclusions i perspectives

Aquesta tesis és només el començament d'una nova línia de recerca en el món de la Mecànica Celeste: el Problema Quasi-bicircular i la seva aplicació a la comprensió d'alguns problemes reals. Aquest model ha estat molt útil per començar a entendre la dinàmica real al voltant de L_2 del sistema Terra-Lluna. Ha permés el càlcul d'òrbites Halo quasi-periòdiques que poden ser refinades a òrbites similars del Sistema Solar. Hom espera que el QBCP sigui útil pel disseny de futures missions espacials a l'entorn del sistema Terra-Lluna.

En un futur proper, la nostra recerca continuarà amb els següents punts, no necessàriament en l'ordre en que són presentats:

1. Disseny d'un nou algorisme per calcular òrbites Halo "pures" del Sistema Solar.

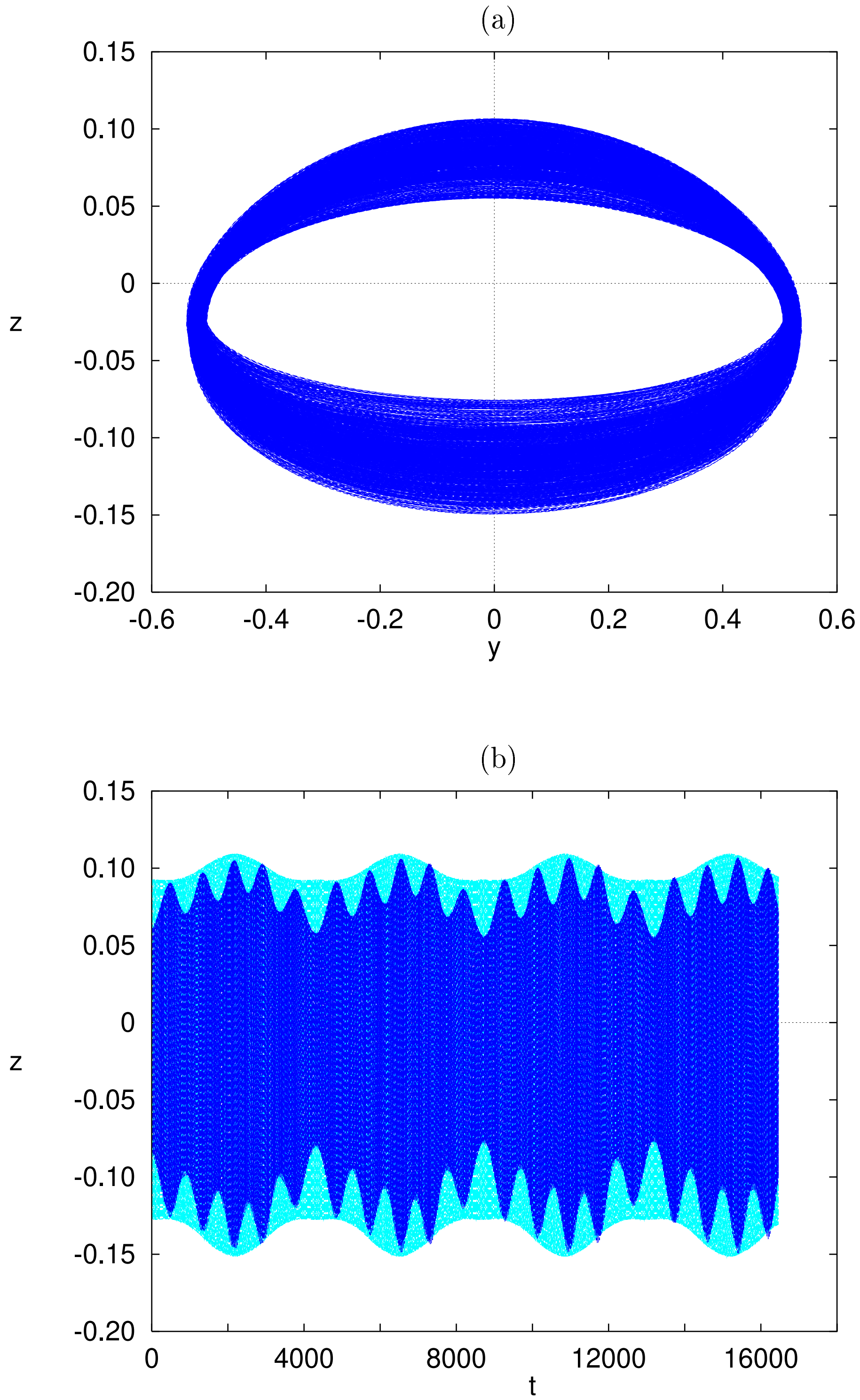

Figura A.10: Una òrbita Halo del Sistema Solar per un interval de temps de 45 anys. La unitat de longitud és la distància entre la Lluna i el punt L_2 (al voltant de 60000 km). El temps s'expressa en dies. (a) Projecció (y, z). (b) Projecció (temps,z) de l'òrbita del Sistema Solar (negre) i projecció (temps,z) de l'òrbita inicial del QBCP (gris).

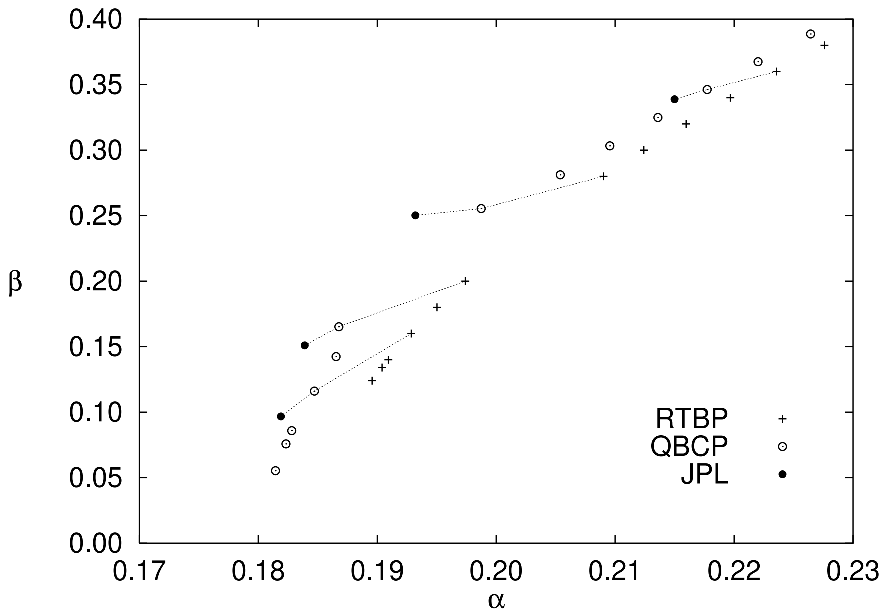

Figura A.11: Amplituds de les òrbites Halo dels RTBP, QBCP i del model JPL. Els punts mostrats pel QBCP corresponen a òrbites calculades al capítol 3. Les del model JPL estan calculades al capítol 5. Les línies discontínues enllacen òrbites amb la mateixa freqüència pròpia.

2. Donat que la reducció a la varietat central no és suficientment acurada a l'entorn de les òrbites Halo resonants, volem fer els següents càlculs numèrics.

    - Continuació de la família de tors 2D de la secció 4.7.3, per tal de comprovar la nostra conjetura.
    - Càlcul numèric de les varietats estable i inestable de l'òrbita periòdica 2C. Això ens donarà la zona al voltant de l'òrbita periòdica on no existeixen òrbites Halo. La varietat inestable té dimensió dos, èssent un dels valors propis associats de l'ordre de 10^6, mentre que l'altre és a prop d'u. La principal dificultat és que estem especialment interesats en el càlcul de la varietat en la direcció del valor propi proper a u.

3. Cal estudiar acuradament les bifurcacions de tors 2D. A partir de la família de Lyapunov plana, la bifurcació on neixen quatre famílies de tors amb freqüència horitzontal igual a $2\omega_s$. Tres d'aquestes s'ajunten en una bifurcació per una certa amplitud de z. També a partir de les òrbites de Lyapunov, la bifurcació on comencen les òrbites Halo.

4. Al capítol 4, hem calculat la reducció a la varietat central al voltant de L_2. Ara, amb un esforç raonable, podem calcular de la mateixa manera la reducció al voltant de L_1 i L_5.

5. A un entorn 3D de L_5, es poden fer simulacions per detectar regions d'estabilitat global. Els resultats es poden comparar amb els obtinguts pel BCP i pel Sistema Solar. Hom espera que les regions d'estabilitat del QBCP estaran més a prop de les del problema real del que ho estan les de BCP.

6. Càlcul d'objectes invariants al voltant de les zones estables del punt anterior. La reducció a la varietat central esmentada abans pot ajudar a identificar aquests objectes. Malgrat això, hom pensa que caldran tècniques numèriques per determinar-los.

7. Càlcul de varietats estables i inestables de tors 2D:

   - En el cas d'òrbites Halo translunars, si la varietat estable passés a prop de la Terra en algun moment, podria ser útil per realitzar la transferència des d'una òrbita al voltant de la Terra cap a una òrbita Halo.
   - En el cas de L_1, calcularem les varietats invariants de les òrbites de Lyapunov quasi-periòdiques planes. Seria interesant veure si n'hi ha òrbites passant consecutivament per a l'entorn de la Terra, L_1 i la Lluna. Si tals òrbites existeixen podrien proporcionar una manera eficient d'anar de la Terra a la Lluna.
   - També es poden considerar els punts L_1^s i L_2^s del sistema Sol-(Terra+Lluna). L'estudi de les varietats invariants associades a ells poden ajudar a trobar òrbites per anar de la Terra a la Lluna passant prop de L_1^s i L_2. Es conegut que tals òrbites existeixen al Sistema Solar.